Geometria Simplettica
e (poca) Meccanica Hamiltoniana

Sherilin Fenn

**Da dove viene e dove va questo testo.** Essenzialmente, in un cestino. A parte gli scherzi: poco c'è di diverso da quello che ho avuto la fortuna di reperire nei testi (più che classici, molto chiari) di Fomenko, Marsden e in effetti anche nelle dispense del corso; posso dire che come al solito aver scritto queste quattro chiacchiere si è risolto in un esercizio di stile. Non vano, perché ho insistito a soffonderle del mio *gusto* nella scelta di ciò che trovo importante ai fini della comprensione degli argomenti più classici, o della fonte *giusta* per esprimere l'idea cui magari non pensiamo di dover importanza, ed invece era fondamentale. Ho voluto, soprattutto, che le parole fossero pervase del senso di donchisciottesca disperazione che coglie chiunque, versato nella geometria (e a maggior ragione chi, come me, non lo è), provi a rendere rigorosi i ragionamenti dei Fisici.

Disciplina affascinante, la loro, perché studiandone dei frammenti ci si accorge che *borgesiana* è la mole di un ipotetico Libro che compendiasse i prerequisiti necessari ad apprenderla. Disciplina comune, perché (si pensa subito dopo) *quale altra materia è esente da questo peso?* Credere che ogni scienziato coltivi la segreta speranza di contribuire ad un paragrafo, anche solo qualche riga di questo testo ultimo, è forse quello che anima le mie notti.

Alla redazione non è seguita (come non segue mai, nei documenti che non sono ufficiali) una revisione vera e propria: questo contribuisce ovviamente a rendere infima la qualità già bassa di questo scritto. Non mi assumo, in poche parole, alcuna responsabilità per funzioni che dovevano essere continue e invece poi si scopre che no, nè per la perdita di apici, pedici, tensorizzazioni o somme di Einstein.

> —Tutto ciò che i simboli possono comunicare è già fuggito. Sono come tracce, lasciate da degli animali. Questa è la ragione per cui il Maestro di meditazione rifiuta di accettare che la scrittura sia il passo finale. Il suo scopo è raggiungere l'Essere per mezzo di quelle tracce, quelle lettere, quei segni – ma la realtà non è un segno, e non lascia tracce. Non ci raggiunge con lettere o parole. Possiamo andargli incontro, seguendo quelle parole e quelle lettere a ritroso verso ciò da cui provengono. Ma finchè ci preoccuperemo di simboli, teorie e opinioni, non riusciremo a giungere al Principio.
>
> —Ma nel momento in cui abbandoniamo simboli e opinioni, non siamo persi, nel totale annullamento dell' Essere?
>
> —Sì, lo siamo.

*Kimura Kyūho,* ***Kenjutsu Fushigii Hen***
*(I misteri dell'arte della Spada)*

## 1.1 Calcolo Tensoriale.

Sia $k$ un campo fissato (ovviamente di caratteristica zero, per conservare intatti tutti i fini pratici). Siano $V, W$ due spazi vettoriali di dimensione finita su $k$. Il *prodotto tensoriale* di $V$ e $W$ è definito come la coppia $(V \otimes W, \otimes)$ dove $\otimes \colon V \times W \to V \otimes W$ e $V \otimes W$ è uno spazio vettoriale definito dalla seguente proprietà universale:

> Per ogni spazio vettoriale $Z$ di dimensione finita su $k$, e ogni $f \colon V \times W \to Z$ bilineare, esiste una e una sola applicazione lineare $\tilde{f} \colon V \otimes W \to Z$ tale che il diagramma
>
> $$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\otimes"'] & Z \\ V \otimes W \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Comunque assegnati $V$ e $W$ si può costruire $V \otimes W$ come $k^{(V \times W)}/\sim$, dove $k^{(V \times W)}$ è lo spazio vettoriale libero sull'insieme $V \times W$ e $\sim$ è la minima relazione di equivalenza generata che identifica

$$\begin{gathered} \alpha(v, w) \sim v(\alpha w) \sim (\alpha v, w) \\ (v + v', w) \sim (v, w) + (v', w) \\ (v, w + w') \sim (v, w) + (v, w'). \end{gathered}$$

Da questa definizione discendono gli isomorfismi

$$\begin{gathered} \mathrm{Bil}_k(V \times W, Z) \cong \hom_k(V \otimes W, Z) \\ (V \otimes W)^* \cong V^* \otimes W^* \\ \hom_k(V \otimes W, Z) \cong \hom_k(V, \hom(W, Z)) \end{gathered}$$

Chiamiamo $v \otimes w$ la classe della coppia $(v, w)$ nel quoziente. Ogni $x \in V \otimes W$ si esprime (per costruzione) come una somma finita $\sum a_i \otimes b_i$. Una base di $V \otimes W$ è data da $\{v_i \otimes w_j\}_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$, ove $\{v_i\}$ è una base di $V$ e $\{w_j\}$ una base di $W$, dato che

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_i a_i \otimes b_i &= \textstyle\sum \Big( \sum_r \alpha_{ri} v_r \Big) \otimes \Big( \sum_s \beta_{si} w_s \Big) \\ &= \textstyle\sum_{r,s} \Big( \sum_i \alpha_{ri} \beta_{si} \Big) v_i \otimes w_j. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Da ora consideriamo uno stesso spazio vettoriale $V$ di dimensione finita su $k$. Definiamo

$$T_\bullet(V) := \bigoplus_{n \ge 0} V^{\otimes n} \tag{1.2}$$

dove la notazione $V^{\otimes n}$ indica il prodotto tensoriale $V \otimes \cdots \otimes V$ fatto $n$ volte. L'insieme $T_\bullet(V)$ è per costruzione una $k$-algebra graduata (ogni elemento si scrive come somma delle sue parti omogenee) ed esiste una operazione di "prodotto tensore" $\otimes \colon T_r(V) \times T_s(V) \to T_{r+s}(V)$, definita su tali parti omogenee da

$$\Big( x = \textstyle\sum x_r, y = \sum y_s \Big) \mapsto x \otimes y = \sum_p \sum_{r+s=p} x_r \otimes y_s$$

In tal modo $T_{r+s}(V)$ si identifica naturalmente a $T_r(V) \otimes T_s(V)$.

$T_\bullet(V)$ soddisfa la seguente proprietà universale, che la caratterizza in effetti come l'algebra associativa e unitaria libera su una base $\{e_1, \ldots, e_d\}$ di $V$:

> Per ogni $f\colon V \to A$ lineare, con $A$ $k$-algebra, esiste una e una sola $\tilde{f}\colon T_\bullet(V) \to A$ tale che il diagramma
>
> $$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d] & A \\ T_\bullet(V) \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$
>
> sia commutativo.

e gode di una proprietà di *funtorialità* (ossia: per ogni $f\colon V \to W$ resta indotta una $T_\bullet(f)\colon T_\bullet(V) \to T_\bullet(W)$, che agisce sui generatori di $T(V)$ come

$$T_\bullet(f)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r) = f(v_1) \otimes \cdots \otimes f(v_r)).$$

È facile verificare che $T_\bullet(g \circ f) = T_\bullet(g) \circ T_\bullet(f)$ e $T_\bullet(\mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_{T_\bullet(V)}$.

Se $V$ a dimensione $n$, si calcola facilmente $\dim_k T_r(V) = n^r$, e dunque $T_\bullet(V)$ non ha dimensione finita non appena $\dim_k V > 0$.

Si può, più in generale, definire $T_r^s(V) = V^{\otimes r} \otimes V^{*\otimes s}$ e la somma

$$T^\bullet(V) := \bigoplus\nolimits_{n\geq 0} V^{*\otimes n} \tag{1.3}$$

(allo stesso modo è definibile $T(V) = T_\bullet(V) \oplus T^\bullet(V)$).

### 1.1.1 Algebra Esterna su $V$.

Sia $\mathfrak{i}$ l'ideale di $T_\bullet(V)$ generato dall'insieme $\{v \otimes v\}_{v\in V}$. Definiamo

$$\bigwedge\nolimits_\bullet(V) := T_\bullet(V)/\mathfrak{i} \tag{1.4}$$

e denotiamo con $\wedge\colon (\alpha,\beta) \mapsto \alpha\wedge\beta$ l'operazione di prodotto indotta da $\otimes$ sul quoziente, definiamo cioè (per $x, y \in T_\bullet(V)$ tali che $p_\mathfrak{i}(x) = \alpha, p_\mathfrak{i}(y) = \beta$)

$$\alpha \wedge \beta := p(x \otimes y).$$

Anche $\bigwedge_\bullet(V)$ è un'algebra graduata, in quanto è facile mostrare che $\mathfrak{i} = \bigoplus_{r\geq 0} \mathfrak{i}_r$, ove $\mathfrak{i}_r := \mathfrak{i} \cap T_r(V)$, dunque posto $\bigwedge_r(V) := T_r(V)/\mathfrak{i}_r$ si ha

$$\bigwedge\nolimits_\bullet(V) = \bigoplus\nolimits_{r\geq 0} \bigwedge\nolimits_r(V) \tag{1.5}$$

(dato che la sequenza $\mathfrak{i}_r \hookrightarrow T_r(V) \twoheadrightarrow \bigwedge_r(V)$ è esatta, anche $\bigoplus_{r\geq 0} \mathfrak{i}_r \hookrightarrow \bigoplus_{r\geq 0} T_r(V) \twoheadrightarrow \bigoplus_{r\geq 0} \bigwedge_r(V)$ è esatta, e allora

$$\bigwedge\nolimits_\bullet(V) \cong T_\bullet(V)/\mathfrak{i} \cong \bigoplus\nolimits_{r\geq 0} T_r(V) \Big/ \bigoplus\nolimits_{r\geq 0} \mathfrak{i}_r \cong \bigoplus\nolimits_{r\geq 0} T_r(V)/\mathfrak{i}_r).$$

$\bigwedge_\bullet(V)$ soddisfa a una proprietà universale:

> Per ogni $f\colon V \to A$, dove $A$ è una $k$-algebra e $f$ è tale che per ogni $v \in V$ $f(v) \cdot f(v) = 0$ in $A$, esiste una e una sola $\tilde{f}\colon \bigwedge_\bullet(V) \to A$ tale che il diagramma
>
> $$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & A \\ \bigwedge_\bullet(V) \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$
>
> sia commutativo

La corrispondenza $V \rightsquigarrow \bigwedge_\bullet(V)$ soddisfa a proprietà di funtorialità analoghe a $V \rightsquigarrow T_\bullet(V)$:

- $\bigwedge(f)(v_1 \wedge \dots \wedge v_r) := f(v_1) \wedge \dots \wedge f(v_r)$;
- $\bigwedge(g \circ f) = \bigwedge(g) \circ \bigwedge(f)$;
- $\bigwedge(\mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_{\bigwedge(V)}$.

**Esercizio.** Si mostri che $y \wedge x = (-1)^{rs} x \wedge y$, se $x \in \bigwedge_r(V), y \in \bigwedge_s(V)$.

Per ogni famiglia di spazi vettoriali $\{W_i\}$ si ha l'isomorfismo

$$V \otimes \left(\bigoplus_I W_i\right) \cong \bigoplus V \otimes W_i.$$

Dunque $\bigwedge(V) \otimes \bigwedge(W) \cong \bigoplus_{r,s\geq 0} \left(\bigwedge_r(V) \otimes \bigwedge_s(W)\right)$, relazione da cui si può dedurre la *proprietà esponenziale* di $\bigwedge(-)$;

$$\bigwedge(V \oplus W) \cong \bigwedge(V) \otimes \bigwedge(W). \tag{1.6}$$

Si provi a mostrare che $\bigwedge_k(V) = (0)$ ogni volta che $k > \dim_{\mathbf{R}} V$. Allora la decomposizione $\bigwedge_\bullet(V) = \bigoplus_{r\geq 0} \bigwedge_r(V)$ è in realtà finita e

$$\bigwedge_\bullet(V) = \bigoplus_{r=0}^n \bigwedge_r(V), \tag{1.7}$$

se $n = \dim_{\mathbf{R}} V$. Una base di $\bigwedge_r(V)$ è fatta da $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}$, dove $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$. Da ciò segue che $\dim_{\mathbf{R}} \bigwedge_r(V) = \binom{n}{r}$ e $\dim_{\mathbf{R}} \bigwedge_\bullet(V) = \sum_r \dim_{\mathbf{R}} \bigwedge_r(V) = 2^n$ (l'isomorfismo esponenziale permette di mostrarlo per induzione su $n$).

Se $H = \{i_1, \dots, i_r\}$ è un sottoinsieme ordinato di $\{1, \dots, n\}$ (ossia se $h \leq k$ implica $i_h \leq i_k$), definiamo

$$e_H = \begin{cases} 1 & \text{se } H = \varnothing \\ e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per $H, K \subseteq \{1, \dots, n\}$ definiamo $e_H \wedge e_K = \epsilon_{HK} e_{H\cup K}$, dove si indica con $H \cup K$ l'unione *ordinata* dei due insiemi e con $\epsilon_{HK}$ il simbolo che vale $(-1)^\nu(H,K)$ quando $H \cap K = \varnothing$ e 0 altrimenti ($\nu(H,K)$ è il segno della permutazione $\left(\begin{smallmatrix} H\cup K \\ H\ K \end{smallmatrix}\right)$ che riordina la giustapposizione degli elementi di $H$ e $K$).

Al variare di $H \subseteq \{1, \dots, n\}$, $\#H = r$, gli $\binom{n}{r}$ elementi $e_H$ formano una base di $\bigwedge_r(V)$.

Se si indica con $\mathrm{Alt}(V^r, W)$ l'insieme delle applicazioni $r$-lineari alternanti dal prodotto $V \times \ dots \times V$ in $W$, si può dimostrare l'identificazione

$$\mathrm{Alt}(V^r, W) \cong \hom_{\mathbf{R}}(\bigwedge_r(V), W) \tag{1.8}$$

per ogni spazio vettoriale $W$; dunque in particolare per $W = \mathbf{R}$ si ha l'identificazione $\mathrm{Alt}(V^r, \mathbf{R}) \cong \bigwedge_r(V)^*$. Poniamo su $\bigwedge_\bullet(V)$ una struttura di coalgebra, utile a indurre un isomorfismo $\bigwedge_\bullet(V) \cong \bigwedge_\bullet(V^*)$. Definiamo

$$\begin{gathered} c\colon \bigwedge(V) \to \bigwedge(V) \otimes \bigwedge(V) \\ v_1 \wedge \dots \wedge v_r \mapsto \sum_{H\colon \#H=r} \epsilon_{HH^c} v_H \otimes v_{H^c} \end{gathered}$$

Si osservi che $\bigwedge(V)\otimes\bigwedge(V)$ è un'algebra (bi)graduata e che $c$ è un omomorfismo che rispetta le graduazioni, ossia

$$c\big(\bigwedge_r(V)\big)\subset\bigoplus_{p+q=r}\bigwedge_p(V)\otimes\bigwedge_q(V).$$

Definiamo allora un prodotto esterno su $\bigwedge(V)^*$: date $u,v\in\bigwedge(V)^*$ poniamo

$$u\wedge v:=\mu\circ(u\otimes v)\circ c. \tag{1.9}$$

In tal modo $u$ "ha grado $r$" se e solo se $u\big(\bigwedge_s(V)\big)=(0)$ per ogni $s\neq r$. Diciamo che $\bigwedge_r(V)^*$ si identifica al sottoinsieme $G_r$ delle forme lineari su $\bigwedge_\bullet(V)$ digrado $r$. Allora $\bigwedge_\bullet(V)^*\cong\bigoplus_{r\geq 0}\bigwedge_r(V)^*$ e si ha l'espressione "in coordinate" per l'azione di $u\wedge v$ su un elemento $v_1\wedge\cdots\wedge v_r$. Se $u\in\bigwedge_r(V)^*$, $v\in\bigwedge_s(V)^*$,

$$(u\wedge v)(v_1\wedge\cdots\wedge v_r)=\sum_{H\subseteq\{1,\dots,r+s\}\colon\,\#H=r}\epsilon_{HH^c}u(v_H)v(V_{H^c}).$$

Definiamo quindi per due forme alternanti $f\in\mathrm{Alt}(V^r,\mathbf{R})$,$g\in\mathrm{Alt}(V^s,\mathbf{R})$ il loro *prodotto esterno* $f\wedge g\in\mathrm{Alt}(V^{r+s},\mathbf{R})$ come

$$(f\wedge g)(v_1\wedge\cdots\wedge v_{r+s})=\frac{1}{r!s!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(r+s)}f(v_{\sigma 1},\dots,v_{\sigma r})g(v_{\sigma(r+1),\dots v_{\sigma(r+s)}})$$

Nell'eseguire calcoli espliciti, si osservi che per $\zeta_1,\dots,\zeta_r\in V^*$, $v_1,\dots,v_s\in V$ si ha

$$(\zeta_1,\wedge\cdots\wedge\zeta_r)(v_1\wedge\cdots\wedge v_s)=\begin{cases}0 & r\neq s\\ \det(\zeta_j(v_j)) & r=s.\end{cases}$$

## 1.2 Varietà (e calcolo su di esse).

Se $U,V\overset{\mathrm{ap}}{\subseteq}\mathbf{R}^n$ è nota la definizione di applicazione $C^k(U,V)$. Sono di facile dimostrazione i risultati seguenti:

- Se $F\colon U\to\mathbf{R}^m$ è di classe $C^k$, ogni sua restrizione a $V\subset U$, $F|_V\colon V\to\mathbf{R}^m$ resta di classe $C^k$. In particolare l'identità di $\mathbf{R}^n$ in sè è di classe $C^\infty$, e dunque tutte le inclusioni $\iota_S\colon S\subset\mathbf{R}^n$ sono di classe $C^\infty$.
- La composizione di applicazioni $C^h,C^k$ è una applicazione di classe $C^{\min(h,k)}$.

Un *diffeomorfismo* di classe $C^k$ è una biiezione $F\colon U\to V$ ove $U,V\overset{\mathrm{ap}}{\subseteq}\mathbf{R}^n$ tale che sia $F$ sia la sua inversa siano di classe $C^k$.

Questa nozione si estende naturalmente al caso in cui $F\colon X\to Y$ sia una generica funzione di insiemi: se $X\subset\mathbf{R}^n$

- $F\colon X\to\mathbf{R}^m$ si dice *di classe* $C^k$ se per ogni $x\in X$ esistono un intorno aperto $U_x$ di $x$ e una mappa tra aperti $\varphi_x\colon U_x\to\mathbf{R}^m$ che sia $C^k$ nel senso usuale.
- se $X,Y\subset\mathbf{R}^m$, $F\colon X\to Y$ si dice $C^k$ se la composizione di $F$ con l'inclusione canonica è di classe $C^k$ nel senso sopra detto.
- $F\colon X\to Y$ si dirà *diffeomorfismo* di classe $C^k$ se è biiettiva e di classe $C^k$ in entrambi i versi.
- Composizione/restrizione di applicazioni $C^k$ è $C^k$.

**Definizione 1.1** [Carta Locale]**:** Sia $X$ uno spazio topologico compatto e connesso. Una *carta locale* o *$n$–sistema di coordinate locali* è una coppia $(U, \varphi_U)$ ove $U$ è un aperto di $X$ e $\varphi_U$ è un omeomorfismo da $U$ in un aperto di $\mathbf{R}^n$. Due carte $(U, \varphi_U), (V, \varphi_V)$si dicono *differenzialmente $C^k$–compatibili* se la funzione

$$\varphi_V \circ \varphi_u^{-1} \colon \varphi_U(U \cap V) \to \varphi_V(U \cap V)$$

è un diffeomorfismo di classe $C^k$.

Le funzioni componenti di una carta $\varphi_U(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$ si dicono *coordinate locali* in $U$. Talvolta $U$ si dirà *aperto coordinatizzato* da $\varphi_U$.

**Osservazione.** Ovviamente se due carte sono $C^k$–compatibili sono anche $C^h$–compatibili per ogni $h \leq k$.

**Definizione 1.2 :** La funzione $\varphi_V \circ \varphi_u^{-1}$ si dice *mappa di transizione* dalle coordinate di $U$ a quelle di $V$. Quel che si chiede a due carte compatibili è di essere uguali a meno di un diffeomorfismo di classe $C^k$.

**Definizione 1.3** [Atlante]**:** Un *$n$–atlante differenziabile* di classe $C^k$ nello spazio topologico $X$ è una famiglia di $n$–carte locali $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ tale che $\mathfrak{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ sia un ricoprimento di $X$ e che le carte locali siano tutte a due a due differenzialmente $C^k$ compatibili.

**Definizione 1.4** [Varietà differenziale di classe $C^k$]**:** Una varietà differenziale di classe $C^k$ (VD) è uno spazio topologico di Hausdorff $(X, \tau)$ a base numerabile dotato di un $n$–atlante differenziabile di classe $C^k$. Si dice anche che tale atlante definisce su $X$ una struttura di varietà differenziabile di classe $C^k$.

La *dimensione* della varietà è la dimensione di un qualunque aperto nel quale una carta mappa aperti della varietà $X$. Tale nozione è ben posta perchè se $(U, \varphi), (V, \psi)$ sono due carte la mappa di transizione è un diffeomorfismo tra aperti dello stesso $\mathbf{R}^n$ e dunque conserva la dimensione: la funzione $x \mapsto \dim_x X$ che manda $x$ nella dimensione di $X$ in un intorno di $x$ è costante su ogni componente connessa di $X$ (e dunque su tutto $X$ se ci limitiamo a studiare varietà connesse).

**Osservazione.** Da ora in poi "differenziabile" (o *liscia*) e "di classe $C^\infty$" diventano sinonimi: le diveristà col caso $C^k$ sono minime, e costituiscono un facile esercizio di interpolazione vigile.

**Definizione 1.5** [Atlanti Equivalenti]**:** Due atlanti $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}, \{(V_\mu, \psi_\mu)\}_{\mu \in M}$ si dicono *equivalenti* se la loro unione

$$\{(U_\lambda, V_\mu; \varphi_\lambda, \psi_\mu)\}_{(\lambda, \mu) \in \Lambda \times M}$$

è ancora un atlante differenziabile. Equivalentemente due atlanti sono equivalenti se ciascuna carta dell'uno è differenzialmente compatibile con ciascuna carta dell'altro. L'unione di tutti gli $n$–atlanti equivalenti di una varietà data si dice il suo *atlante massimale*.

Facciamo alcuni esempi:

1. $\mathbf{R}^n$ stesso è una VD di dimensione $n$: un suo atlante è dato dall'unia carta $(\mathbf{R}^n, \mathrm{id})$.

2. Ogni $U \overset{\text{ap}}{\subseteq} \mathbf{R}^n$ è una VD di dimensione $n$: un suo atlante è dato dall'unica carta $(U, \iota)$, ove $\iota$ è l'inclusione canonica $\mathrm{id}|_U$.
3. Pi in generale ogni aperto di $X$ nella topologia indotta dall'ambiente è una VD della stessa dimensione. Se $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ è un atlante di $X$, un atlante della sottovarietà $S \subset X$ è dato da

$$\{(U_\lambda \cap S, \varphi_\lambda|_{U_\lambda \cap S})\}_{\lambda \in \Lambda_S}$$

ove $\Lambda_S = \{\lambda \in \Lambda \mid U_\lambda \cap S \neq \varnothing\}$.
4. Ogni sottoinsieme $D$ discreto in uno spazio topologico $X$ è una varietà di dimensione 0, e ha come atlante la famiglia $\{(\{p_i\}, \varphi_i)\}_{i \in I}$, ove $\{p_i\}_i$ è una enumerazione degli elementi di $D$ e $\varphi_i \colon \{p_i\} \to \{0\}$ manda $p_i$ in 0.

L'importanza della definizione data è la possibilità di estendere gli strumenti del Calcolo a funzioni tra sottoinsiemi qualunque (purchè abbastanza regolari) dei vari spazi euclidei.

**Definizione 1.6** [Varietà Diffeomorfe – Morfismo di Varietà]**:** Siano $X, Y$ due VD di dimensioni $n, m$. Una applicazione $F \colon X \to Y$ si dice *differenziabile* o *morfismo di varietà* se nel diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R}^n \arrow[r, "\bullet"] & \mathbf{R}^m \\ X \cap U_\lambda \arrow[u, "\varphi_\lambda"] \arrow[r, "F"] & Y \cap V_\mu \arrow[u, "\psi_\mu"'] \end{tikzcd}$$

l'applicazione $\psi_\mu \circ F \circ \varphi_\lambda^{-1}$ è differenziabile come mappa di aperti usuali. Se tale funzione è un diffeomorfismo, $F$, $F^{-1}$ sono *diffeomorfismi di varietà*.

Alcune costruzioni che generalizzano le definizioni appena date:

- Se $\{M_\beta\}_{\beta \in B}$ è una famiglia di VD, l'unione disgiunta $\coprod_{\beta \in B} M_\beta$ ha una naturale struttura di VD indotta dall'atlante

$$\mathcal{A} = \bigsqcup_{\beta \in B} A_\beta$$

ove gli $A_\beta$ sono atlanti degli $M_\beta$.
- Se $M, N$ sono VD possiamo porre sul prodotto cartesiano $M \times N$ una naturale struttura di VD. Siano $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}$ e $\{(V_\mu, \psi_\mu)\}$ atlanti di $M$ ed $N$ rispettivamente. Allora un atlante di $M \times N$ è definito da

$$\{(U_\lambda \times V_\mu, \varphi_\lambda \times \psi_\mu)\}$$

ove $\varphi_\lambda \times \psi_\mu \colon U_\lambda \times V_\mu \to \mathbf{R}^{m+n}$ manda $(p, q) \in U_\lambda \times V_\mu$ in $\varphi_\lambda(p), \psi_\mu(q))$ (con questa definizione di "prodotto", se $(U', \varphi'_U), (V'; \psi'_V)$ sono carte locali su $X, Y$ diverse da $(U, \varphi_U), (V; \psi_V)$ esse sono compatibili).

**C'è ancora qualcosa da dire!**

### 1.2.1 Forme Differenziali.

Se $U \overset{\text{ap}}{\subseteq} \mathbf{R}^n$ definiamo una *forma differenziale di grado* $r$ su $U$ comeuna applicazione liscia ($= C^\infty$)

$$\omega \colon U \to \bigwedge_r (\mathbf{R}^n)^*$$

Denotando con $x^1, \dots x^n$ la base canonica di $\mathbf{R}^n$, si indica la duale come $\mathrm{d}x^1, \dots, \mathrm{d}x^n$: una base per $\bigwedge_r (\mathbf{R}^n)^*$ è fatta allora hai $\binom{n}{r}$ monomi $\mathrm{d}x^H = \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_r}$ al variare di $1 \le i_1 < \dots < i_r \le n$. Una $r$-forma $\omega$ si scrive allora in modo unico come

$$\omega = \sum\nolimits_H f_H \mathrm{d}x^H \tag{1.10}$$

L'insieme $\Omega_r(U)$ delle $r$-forme su $U$ ha una struttura naturale di $C^\infty(U)$-modulo (e in effetti è un $C^\infty$ modulo nel senso dei fasci), e $\Omega_r(U) = (0)$ per $r > n$. L'unione

$$\Omega_\bullet(U) = \bigoplus\nolimits_{r \ge 0} \Omega_r(U)$$

è dunque una $C^\infty(U)$-algebra graduata dotata del prodotto esterno di forme.

### 1.2.2 Derivazione Esterna.

Se $\omega \in \Omega_r(U)$, $\omega' \colon U \to \hom_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^n, \bigwedge_r (\mathbf{R}^n)^*)$, e dato che si hanno le identificazioni

$$\begin{aligned} \hom_{\mathbf{R}}\Big(\mathbf{R}^n, \bigwedge\nolimits_r (\mathbf{R}^n)^*\Big) &\cong \hom_{\mathbf{R}}\Big(\mathbf{R}^n \otimes \bigwedge\nolimits_r (\mathbf{R}^n), \mathbf{R}\Big) \\ &\cong (\mathbf{R}^n)^* \otimes \bigwedge\nolimits_r (\mathbf{R}^n)^* \cong \bigwedge\nolimits_1 (\mathbf{R}^n)^* \otimes \bigwedge\nolimits_r (\mathbf{R}^n)^*. \end{aligned}$$

A definire una applicazione $\mathrm{d} \colon \Omega^r(U) \to \Omega^{r+1}(U)$ sarà allora sufficiente prendere la parte alternante del differenziale $\omega'$:

$$\omega' = \Big(\sum\nolimits_H f_H \mathrm{d}x^H\Big)' = \sum\nolimits_H \mathrm{d}f_H \otimes \mathrm{d}x^H; \quad \mathrm{d}\omega = \operatorname{alt} \omega';$$

definiamo cioè

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}\Big(\sum\nolimits_H f_H \mathrm{d}x^H\Big) \\ &= \sum\nolimits_H \mathrm{d}f_H \wedge \mathrm{d}x^H \\ \star &= \sum\nolimits_H \tfrac{\partial f}{\partial x^i} \wedge \mathrm{d}x^H. \end{aligned}$$

Si verificano le proprietà seguenti:

- D1 *linearità* di $\mathrm{d} \colon \Omega^r(U) \to \Omega^{r+1}(U)$;
- D2 *regola di Leibniz*: $\mathrm{d}(\omega \wedge \tau) = \mathrm{d}\omega \wedge \tau + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge \mathrm{d}\tau$;
- D3 $C^\infty(U) \cong \Omega^0(U) \to \Omega^1(U) \to \dots \to \Omega^{n-1}(U) \to \Omega^n(U)$ è un *complesso di cocatene*, ovvero la composizione $\Omega^{r-1}(U) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^r(U) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^{r+1}(U)$ è zero (si faccia la verifica a mano usando $\star$).

Qualora si aggiunga a D1, D2, D3 la proprietà

- D4 $\mathrm{d}$ coincide con l'usuale differenziale di funzioni $C^\infty(U) \to \Omega^1(U)$

si riesce a caratterizzare in modo univoco l'operazione di derivazione esterna.

### 1.2.3 Formula intrinseca per $\mathrm{d}$.

È facile notare che per ogni $f \in \bigwedge_r(\mathbf{R}^n)^* \otimes \bigwedge_s(\mathbf{R}^n)^*$, indicando con $\pi$ la mappa $\bigwedge_r(\mathbf{R}^n)^* \otimes \bigwedge_s(\mathbf{R}^n)^* \to \bigwedge_{r+s}(\mathbf{R}^n)^* \colon u \otimes v \mapsto u \wedge v$, e ponendo $g = \pi(f)$ si ha

$$g(v_1 \wedge \cdots \wedge v_{r+s}) = \sum_H \epsilon_H f(v_H \otimes v_{H^c})$$

(basta verificare per $f = u \otimes v$ ed estendere per linearità il risultato).

Allora, dato che per ogni $p \in U \overset{\mathrm{ap}}{\subseteq} \mathbf{R}^n$ è $\omega'(p) \in \bigwedge_1(\mathbf{R}^n)^* \otimes \bigwedge_r(\mathbf{R}^n)^*$,

$$\omega'(p)(v_0 \otimes (v_1 \wedge \cdots \wedge v_r)) = \omega'(p)(v_0)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r)$$
$$\mathrm{d}\omega(p) = \pi(\omega'(p))$$
$$\mathrm{d}\omega(p)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) = \sum_k (-1)^k \omega'(p)(v_k)(v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v_k} \wedge \cdots \wedge v_r)$$

### 1.2.4 Pull-back di una $r$-forma.

Se $F \colon U \to V$ è una applicazione $C^\infty$ di aperti di $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^m$, con coordinate $x^1, \dots, x^n$, $y^1, \dots, y^m$, allora $F' \colon U \to \hom_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$. Il *pull-back* di $\omega \in \Omega_r(V)$ mediante $F$ è la $r$-forma $F^*\omega \in \Omega_r(U)$ definita come

$$\begin{aligned} F^*\omega(p)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) &= \omega(F(p))\Big(\textstyle\bigwedge_r(F'(p))(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r)\Big) \\ &= \omega(F(p))(F'(p)(v_1) \wedge \cdots \wedge F'(p)(v_r)) \end{aligned}$$

Si noti che

- $F^* \colon \Omega^0(V) \to \Omega^0(U) \cong C^\infty(U)$ agisce come $F^*g = g \circ F$ per ogni $g \in \Omega^0(V) \cong C^\infty(V)$;
- $F^* \colon \Omega^r(V) \to \Omega^r(U)$ è $C^\infty(V)$-lineare, ed è il fascio immagine inversa di $\Omega^r$ mediante $F$;
- $F^*(\omega \wedge \tau) = F^*\omega \wedge F^*\tau$, per ogni $\omega \in \Omega_r(V), \tau \in \Omega_s(V)$ (il pull-back rispetta il prodotto esterno);
- $F^*(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}F^*\omega$ (il pull-back commuta con la derivazione esterna);
- $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$;
- $F^*\big(\sum_H g_H \mathrm{d}y^H\big) = \sum_H (g_H \circ F)\mathrm{d}F^H$, intendendo con $\mathrm{d}F^H$, $H = \{i_1, \dots, i_r\}$ il minore ottenuto dalla matrice jacobiana di $F$ dalle righe $i_1, \dots, i_r$.

Fissiamo una base dello spazio $V$: stiamo fissando un isomorfismo $\bigwedge_n(C) \to \mathbb{R}$, precisamente quello che manda l'unico elemento di base $v_1 \wedge \dots v_n$ in 1. Per ogni $0 \leq k \leq n$ possiamo quindi definire un'applicazione bilineare

$$\textstyle\bigwedge_k(V) \times \bigwedge_{n-k}(V) \to \bigwedge_n(V) \to \mathbb{R}$$

ottenuto per composizione col prodotto esterno. Si dimostri che tale applicazione è non degenere, e dunque costituisce una dualita' tra $\bigwedge_k(V)$ e $\bigwedge_{n-k}(V)$. Componendo questo isomorfismo con quello indotto dalla dualita' canonica $V \cong V^*$, che mette in isomorfismo $\bigwedge_k(V)$ e $\bigwedge_k(V^*)$, si ottiene un isomorfismo, $\delta \colon \bigwedge_k(V^*) \to \bigwedge_{n-k}(V)$.

Se ora si fissa su $V$ una applicazione bilineare non degenere e simmetrica $g$, ad essa resta associato un isomorfismo di spazi vettoriali $\bar{g}$ tra $V$ e il suo duale. Otteniamo quindi, ancora una volta per composizione, l'isomorfismo

$$\textstyle\bigwedge_k(V) \to \bigwedge_k(V^*) \to \bigwedge_{n-k}(V)$$

che prende il nome di *operatore di Hodge* relativo a $\bar{g}$.

Per l'usuale prodotto scalare reale, l'operatore $*$ di Hodge è definito come $*\colon \Omega_r(U) \to \Omega_{n-r}(U)\colon \mathrm{d}x^H \mapsto \epsilon_H \mathrm{d}x^{H^c}$. Se $\omega = \sum_H f_H \mathrm{d}x^H$, $*\omega = \sum_H f_H * \mathrm{d}x$.

Se $F$ è un campo vettoriale definito su $U$, e si scrive $F = \sum F_i \frac{\partial}{\partial x^i}$, ad esso si associa naturalmente una forma differenziale:

$$F \mapsto \omega_F = F \cdot \mathrm{d}x = \sum F_i * \mathrm{d}x^i$$

e tale corrispondenza è un isomorfismo di $C^\infty(U)$-moduli. In generale, tutti gli operatori differenziali agenti su campi vettoriali si possono definire con opportune composizioni di $\mathrm{d}, *$, sfruttando le proprietà

- $* \circ * = (-1)^{r(n-r)}\,\mathrm{id}$ su ogni $\bigwedge_r(V)$;
- (Lemma.) Esiste un'unica forma bilineare (simmetrica e definita positiva) $\bigwedge_r(V) \times \bigwedge_r(V) \to \bigwedge_r(V)\colon (x, y) \mapsto x \cdot y$ definita sui generatori in modo che $(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) \cdot (w_1 \wedge \cdots \wedge w_r) = \det(v_i \cdot w_j)$; questa si estende all'intera $\bigwedge_\bullet(V)$ ponendo $x \cdot y = \sum_r x_r \cdot y_r$ (somma dei prodotti sulle componenti omogenee). Questa posizione dà un prodotto scalare su $\bigwedge_\bullet(V)$.
- Nelle notazioni del Lemma precedente, $(*x) \cdot (*y) = x \cdot y$ e $x \wedge *y = (x \cdot y)e_{[1,n]}$.

**C'è ancora qualcosa da dire!**

## 1.3 Geometria Simplettica.

### 1.3.1 Definizioni e Prime Proprietà.

A. Sia $V$ uno spazio vettoriale (di dimensione finita) su $\mathbf{R}$. Una *struttura simplettica* su $V$ è una forma bilineare $\omega$ antisimmetrica e non degenere, tale cioè che la mappa $\varpi\colon V \to V^*\colon v \mapsto \omega(v, -)$ sia un isomorfismo di spazi vettoriali.

AG. Sia $E$ un fibrato vettoriale liscio sopra una varietà $M$ (per esempio si consideri il suo fibrato tangente $TM$: si veda in [G] poco sotto che questo caso può essere preso come il caso generale senza ledere alla generalità dell'esposizione); una *struttura simplettica* su $E$ consiste nel dato di una famiglia $\{\omega_x\}_{x\in E}$ di strutture simplettiche nel senso [A], che "varia continuamente al variare del parametro".

G. Se $M$ è una varietà liscia una *struttura simplettica* $\omega$ su $M$ è una struttura simplettica su $TM$ nel senso [AG], che considerata come un elemento di $\Omega^2(M)$ è chiusa ($\mathrm{d}\omega = 0$) e non degenere (nel senso [A]).

In tutti e tre i casi si possono dare degli esempi basilari

A. La somma $V \oplus V^*$ di uno spazio e il suo duale, dove $\omega_+$ è definita da

$$\omega_+((u, \zeta), (v, \xi)) = \xi(u) - \zeta(v).$$

Si noti collateralmente che un ragionamento sul determinante di $\omega \in \mathrm{Alt}(V \times V, \mathbf{R})$ fa dedurre che la dimensione di $V$ deve essere pari ($\det A = \det A^t = \det(-A) = (-1)^n \det A$).

AG. La somma di Whitney dei fibrati $E \oplus E^*$ ($E^*$ ha per fibre i duali delle fibre di $E$; nel linguaggio dei fibrati su uno stesso spazio $B$, $E \oplus F$ è definito da $E \to B$, $F \to B$ come il fibrato pull-back di $\Delta\colon B \to B \times B$, di modo che il quadrato

$$\begin{tikzcd}
E \oplus F \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & E \times F \arrow[d, "\pi_E \times \pi_F"] \\
B \arrow[r, "\Delta"'] & B \times B
\end{tikzcd}$$

sia cartesiano: ogni fibra di $E \oplus F$ risulta dalla somma diretta delle fibre di $E$ e di $F$).

G. L'esempio base è dato da $\mathbf{R}^{2n}$ dotato della 2-forma

$$\omega = \sum \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}\xi^i,$$

dove $(x_1, \dots, x_n, \xi^1, \dots, \xi^n)$ sono le coordinate canoniche. Un teorema di Darboux mostra che *ogni* varietà simplettica secondo [G] è localmente simplettomorfa a questa (= esiste un isomorfismo di spazi vettoriali che rispetta le $\omega$, fibra per fibra nel caso geometrico). Non esistono, dunque, invarianti "locali" di una varietà simplettica analoghi alla curvatura esistente in ambito riemanniano.

Noti teoremi di algebra lineare affermano che, dato uno spazio vettoriale di dimensione pari $2n$ e una forma bilineare alternante su di esso, esiste una base dello spazio tale che $\omega(u, v) = \langle u, \mathbb{E}v\rangle$, ove $\mathbb{E} = \left(\begin{smallmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I}_n \\ -\mathbb{I}_n & \mathbb{O} \end{smallmatrix}\right)$. Il teorema di Darboux afferma che se $(M, \omega)$ è simplettica, per ogni $p \in U \overset{\text{ap}}{\subseteq} M$ esiste una carta $\varphi$ di $M$ centrata in $p$ il cui dominio è contenuto in $U$ e tale che $\omega = \sum \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}\xi^i$ nelle coordinate locali indotte da $\varphi$ su $T_p^*M$. In altre parole

- Due spazi vettoriali simplettici $(V, \omega_V)$, $(W, \omega_W)$ sono simplettomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione (dunque ogni coppia di spazi vettoriali isomorfi e simplettici è simplettomorfa).
- Due varietà simplettiche $(M, \omega_M)$, $(\mathcal{N}, \omega_{\mathcal{N}})$ sono localmente simplettomorfe se e solo se hanno la stessa dimensione. Il problema globale è ancora insoluto, tranne che in dimensione 2 e per $M$ orientabile, dove Moser ha dimostrato che $(M, \omega_M) \cong (\mathcal{N}, \omega_{\mathcal{N}})$ compatte sono simplettomorfe se e solo se sono diffeomorfe e $\int_M \omega_M = \int_{\mathcal{N}} \omega_{\mathcal{N}}$ (="volume totale" delle due varietà compatte: ancora Moser ha mostrato che questo è l'unico invariante simplettico di varietà compatte).

Vi sono varietà liscie che non ammettono strutture simplettiche (non esiste un analogo simplettico del teorema di Whitney per varietà riemanniane). Se per assurdo su $\mathbb{S}^4$ esistesse una 2-forma $\omega$ chiusa e non degenere, allora essa sarebbe esatta ($H^2_{\mathrm{dR}}(\mathbb{S}^4) = (0)$), dunque $\omega = \mathrm{d}\theta$ per qualche $\theta \in \Omega^1(\mathbb{S}^4)$, e $\Omega = \omega \wedge \omega$, forma volume su $\mathbb{S}^4$, sarebbe anch'essa esatta ($\mathrm{d}(\omega \wedge \theta) = \omega \wedge \omega$). Per il teorema di Stokes allora si avrebbe

$$\mathrm{vol}(\mathbb{S}^4) = \int_{\mathbb{S}^4} \Omega = \int_{\mathbb{S}^4} \mathrm{d}(\omega \wedge \theta) = \int_{\partial\mathbb{S}^4} \omega \wedge \theta = 0 \quad (\partial\mathbb{S}^4 = \varnothing)$$

il che è visibilmente assurdo.

Ciò che si può dire in generale è che se $(M, \omega_M)$ è simplettica, di dimensione $2n$, $\Omega^n = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ è una forma volume su $M$, dunque deve essere $H^{2n}_{\mathrm{dR}}(M) \neq (0)$.

Dal momento che $[\Omega^n] = [\Omega]^n$, $[\Omega] \in H^2_{\mathrm{dR}}(M)$,e $[\Omega]^k \neq (0)$ per ogni $k \leq n$. L'esistenza di un tale elemento è condizione necessaria alla presenza di una struttura simplettica su $M$; un'altra condizione necessaria è la presenza di una struttura simplettica su $TM$, il fibrato tangente.

Se $M$ è una varietà liscia, il suo fibrato cotangente $T^*M$ ammette una struttura simplettica data dalla derivata esterna della 1-forma canonica di Liouville, $\theta = \sum p_i \mathrm{d}q_i$,

$$\omega = \mathrm{d}\theta = \sum \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q_i$$

(le coordinate di Darboux sono date in questo caso proprio dall'atlante fibrato di $T^*M$ costruito a partire da quello di $M$). In coordinate si ha

$$\begin{aligned} \omega_M(q,p)\Big(\big(\begin{smallmatrix}\xi_1\\ \eta_1\end{smallmatrix}\big), \big(\begin{smallmatrix}\xi_2\\ \eta_2\end{smallmatrix}\big)\Big) &= \sum(\mathrm{d}p_i \otimes \mathrm{d}q_i - \mathrm{d}q_i \otimes \mathrm{d}p_i)\Big(\big(\begin{smallmatrix}\xi_1\\ \eta_1\end{smallmatrix}\big), \big(\begin{smallmatrix}\xi_2\\ \eta_2\end{smallmatrix}\big)\Big) = \\ &= \eta_1 \cdot \xi_2 - \eta_2 \cdot \xi_1 = \Big\langle \big(\begin{smallmatrix}\mathbb{O} & \mathbb{I}\\ -\mathbb{I} & \mathbb{O}\end{smallmatrix}\big)\big(\begin{smallmatrix}\xi_1\\ \eta_1\end{smallmatrix}\big), \big(\begin{smallmatrix}\xi_2\\ \eta_2\end{smallmatrix}\big)\Big\rangle \end{aligned}$$

La matrice $\mathbb{E} = \big(\begin{smallmatrix}\mathbb{O} & \mathbb{I}\\ -\mathbb{I} & \mathbb{O}\end{smallmatrix}\big)$ è detta *unità simplettica*.

### 1.3.2 Varietà Isotrope, Coisotrope, Lagrangiane.

Sia $(M,\omega)$ una varietà simplettica, $S \subseteq M$ una sua sottovarietà, presentata con l'immersione $j_S\colon S \hookrightarrow M$. Definiamo per ogni $x \in S$ l'*ortogonale* (in senso simplettico) ad $S$ in $x$ come il sottospazio

$$T_x^\top S = \left\{ v \in T_{j_S(x)}M \mid \omega(Tj_S(u), v) = 0 \ \ \forall\, u \in T_xS \right\}$$

Data la non-degenerazione di $\omega$, $\dim T_x^\top S = \dim M - \dim S$. Chiamiamo $S$ una sottovarietà

- *isotropa* se $T_xS \subseteq T_x^\top S$ (ossia se $j_S^*\omega = 0$);
- *coisotropa* se $T_xS \supseteq T_x^\top S$;
- *lagrangiana* se $T_xS = T_x^\top S$.

**Osservazione.** Se $S$ è isotropa, $\dim S \leq n$; se $\dim S = 2n-1$ allora $S$ è coisotropa; se $\dim S = 1$, allora $S$ è isotropa.

*Dimostrazione.* La prima constatazione discende da un argomento di algebra lineare: se $(V,\omega)$ è uno spazio vettoriale simplettico, esiste un'unica applicazione lineare (invertibile se $\omega$ è non degenere) $\Omega$ tale che $\omega(y,y') = \langle \Omega y, y' \rangle$. Ora, se $Y \leq V$ è un sottospazio isotropo di dimensione $k$, per non degenerazione, $\Omega(Y) \leq V$ è un sottospazio della stessa dimensione; d'altra parte $\Omega(Y) \subseteq Y^\perp$ (l'ortogonale euclideo), dunque $\dim Y + \dim \Omega(Y) = 2k \leq \dim V = 2n$, e si conclude.

Per la seconda: il sottospazio $Y^\top = T^\top S$ è generato da un singolo vettore $a$, e allora $Y = Y^{\top\top} = \langle a \rangle^\top = \{y \in V \mid \omega(a,y) = 0\} \supset \langle a \rangle$, dato che $\omega(a,a) = 0$.

Per la terza: $j_S^*\omega(v,w) = 0$ perché $v, w$ sono linearmente dipendenti. □

Una sottovarietà $\Lambda \subset M$ dunque è *lagrangiana* se e solo se è isotropa e di dimensione $n$; dire che $j_\Lambda^*\omega = 0$ equivale a dire che $j_\Lambda^*\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}j_\Lambda^*\theta = 0$, ossia che $j_\Lambda^*\theta$ è chiusa. Il lemma di Poincarè afferma ora che $j_\Lambda^*\theta$ è (almeno localmente) esatta, dunque esiste $\tilde{s}\colon \Lambda \to \mathbf{R}$ tale che $\mathrm{d}\tilde{s} = j_\Lambda^*\theta$.

Ricordando che due varietà si dicono *trasversali* se i loro spazi tangenti non sono uno contenuto nell'altro, supponiamo che $\Lambda$ sia trasversale alle fibre di $T^*M$ (intendendo con ciò le fibre della *proiezione* canonica $\pi_M : T^*M \to M$), considerando

$$\Lambda \xrightarrow{j_\Lambda} T^*M \xrightarrow{\pi_M} M$$

che manda $\lambda \mapsto (q(\lambda), p(\lambda)) \mapsto q(\lambda)$. Si ha allora

$$T_{(q,p)}T^*M = T_{(q,p)}j_\Lambda(\Lambda) \oplus T_{(q,p)} \underbrace{T^*_q M}_{\pi^{\leftarrow}(q)} .$$

("è come se la sequenza $T\Lambda \hookrightarrow TT^*M \twoheadrightarrow TM$ spezzasse"), ed esiste una $\tilde{\lambda}\colon M \to \Lambda$, inversa locale di quella composizione. Consideriamo allora la mappa $s = \tilde{s} \circ \tilde{\lambda}\colon M \to \Lambda \to \mathbf{R}$, definita in un aperto $U$ di $M$. Il suo grafico "disegna" $\Lambda$; le componenti dell'immersione $j_\Lambda : \lambda \mapsto p(\lambda)$ sono tali che $\mathrm{d}\tilde{s}(\lambda)$ è

$$p_i \mathrm{d}q^i|_\Lambda = p_i(\lambda)\frac{\partial q^i}{\partial \lambda^j}(\Lambda)\mathrm{d}\lambda^j$$

e dunque $\mathrm{d}s = \mathrm{d}(\tilde{s} \circ \tilde{\lambda})$ è uguale a

$$\mathrm{d}s(q) = \mathrm{d}\tilde{s} \circ \mathrm{d}\tilde{\lambda} = p_i(\lambda) \cdot \underbrace{\frac{\partial q^i(\lambda)}{\partial \lambda^j}}_{(\lambda=\tilde{\lambda}(q))} \frac{\partial \tilde{\lambda}^j(q)}{\partial q^k} \cdot \mathrm{d}q^k = p_i \delta_{ik} \mathrm{d}q^k = p_i(\tilde{\lambda}(q))\mathrm{d}q^i \subset T^*M.$$

Ciò avviene con le coordinate $\lambda$, dunque tale punto appartiene a $\Lambda$. In tal modo almeno localmente $\mathrm{im}\big(\mathrm{d}s\colon q \mapsto \mathrm{d}s(q)\big) = j_\Lambda(\Lambda)$.

Di converso una funzione $s\colon M \to \mathbf{R}$ primitiva di $j^*\theta$ genera una sottovarietà lagrangiana in $T^*M$ con il suo grafico

$$\Lambda_s = \Big\{(q, \mathrm{d}s(q)) \mid q \in M\Big\}$$

visibilmente di dimensione $n = \frac{1}{2}\dim M$ (è infatti determinata dagli $n$ parametri $q = (q_1, \dots, q_n)$) e tale che $\omega|_{\mathrm{im}\,\mathrm{d}s} = \mathrm{d}\big(\theta|_{\mathrm{d}s}\big) = \mathrm{d} \circ \mathrm{d}s = 0$.

### 1.3.3 Simplettomorfismi.

È naturale studiare i *morfismi* della categoria delle varietà simplettiche.

**Definizione 1.7 :** Sia $(M, \omega)$ una varietà simplettica. Una applicazione liscia $f\colon M \to M$ si dice *simplettomorfismo* o *trasformazione canonica* se

$$f^*\omega_M = \omega_M.$$

Si osservi che tale condizione implica che $f^*(\omega \wedge \cdots \wedge \omega) = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$, per ogni $k \geq 1$. Se indichiamo con $\Omega$ la forma volume $\omega \wedge \cdots \wedge \omega$ ($n$ volte), otteniamo che ogni trasformazione canonica è *isocora*, ossia rispetta la misura su $M$. Ciò implica che ogni simplettomorfismo è un diffeomorfismo locale (perché $\det \mathrm{Jac}\, f = 1 \neq 0$).

In generale, una applicazione liscia tra due varietà simplettiche $(M, \omega_M)$ e $(\mathcal{N}, \omega_{\mathcal{N}})$ è canonica se $f^*\omega_{\mathcal{N}} = \omega_M$. Anche in questo caso, se $\dim M = \dim \mathcal{N}$, ogni trasformazione canonica è un diffeomorfismo locale che preserva i volumi.

Se $(M,\omega)$ è una varietà simplettica, definiamo il *sollevamento cotangente* di un diffeomorfismo tra varietà come l'"aggiunta puntuale" della mappa tangente $Tf$: definiamo cioè la mappa $T^*f\colon T^*N \to T^*M$ come l'unica tale che $\langle T^*f(\alpha), v\rangle = \langle \alpha, Tf(v)\rangle$ per ogni $\alpha \in T_q^*N$, $v \in T_{f^{-1}(q)}M$.

**Proposizione 1.1.** Se $f\colon M \to N$ è un diffeomorfismo, $(T^*f)^*\theta_M = \theta_N$, le $\theta$ indicando le forme tautologiche di Liouville.

*Dimostrazione.* È un contazzo:

$$\begin{aligned}
(T^*f)^*\theta_1(\alpha_q)\cdot w &= \theta_1(T^*f(\alpha_q))(TT^*f\cdot w)\\
&= T^*f(\alpha_q)\cdot (T\pi_1\cdot TT^*f)\cdot w)\\
&= T^*f(\alpha_q)\cdot (T(\pi_1\circ T^*f)\cdot w)\\
&= \big\langle \alpha_q, Tf\circ T(\pi_1\circ T^*f)\cdot w\big\rangle\\
&= \big\langle \alpha_q, T(f\circ\pi_1\circ T^*f)\cdot w\big\rangle\\
&= \langle \alpha_q, T\pi_2\cdot w\rangle = \theta_N(\alpha_q)\cdot w
\end{aligned}$$

ricordando che la definizione di $\theta_\#(\alpha)\cdot w$ è $\langle\alpha, T\pi_\#\cdot w\rangle$. $\square$

**Proposizione 1.2.** Consideriamo un simplettomorfismo $f\colon (M,\omega_1)\to(N,\omega_2)$, e una sottovarietà lagrangiana $\Lambda\subset M$. Allora $f\circ j_\Lambda(\Lambda)$ è lagrangiana in $N$.

*Dimostrazione.*

$$\omega_2|_{f\circ j_\Lambda(\Lambda)} = j^*\circ f^*\omega_2 = j^*\omega_1 = \omega_1|_\Lambda = 0$$ $\square$

Una seconda definizione di simplettomorfismo si ottiene dalle osservazioni seguenti:

- Se $(M_1,\omega_1)$, $(M_2,\omega_2)$ sono due varietà simplettiche della stessa dimensione, consideriamo le proiezioni

$$\begin{tikzcd}
& M_1\times M_2 \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
M_1 & & M_2
\end{tikzcd}$$

  definiamo una 2-forma $\omega = p_1^*\omega_1 + p_2^*\omega_2$, che è chiusa (perché $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(p_1^*\omega_1 + p_2^*\omega_2) = \mathrm{d}p_1^*\omega_1 + \mathrm{d}p_2^*\omega_2 = p_1^*\mathrm{d}\omega_1 + p_2^*\mathrm{d}\omega_2 = 0+0$) e simplettica (perché $\omega^{2n} = \binom{2n}{n}(p_1^*\omega_1)^n\wedge(p_2^*\omega_2)^n$).
- Più generalmente, dati due numeri reali non nulli $\lambda,\mu$, ogni combinazione lineare $\omega_{\lambda,\mu} = \lambda\cdot p_1^*\omega_1 + \mu\cdot p_2^*\omega_2$ rende $M_1\times M_2$ una varietà simplettica. Scegliamo da ora in poi $\omega_{1,-1} = \widetilde{\omega} = p_1^*\omega_1 - p_2^*\omega_2$.
- Dato un diffeomorfismo $\varphi\colon M_1\to M_2$, il suo grafico $\Gamma_\varphi = \big\{(p,\varphi(p)) \mid p\in M_1\big\}$ è un sottoinsieme (una sottovarietà) del prodotto $M_1\times M_2$.

Alla luce di tutto questo, si ha la seguente

**Proposizione 1.3.** Una applicazione liscia $\varphi\colon M_1\to M_2$ è un simplettomorfismo se e solo se $\Gamma_\varphi$ è una sottovarietà lagrangiana di $(M_1\times M_2, p_1^*\omega_1 - p_2^*\omega_2)$.

*Dimostrazione.* $\Gamma_\varphi$ è lagrangiana se e solo se il pullback di $\widetilde{\omega}$ via $\gamma_\varphi\colon p \mapsto (p, \varphi(p))$ è nullo: ma

$$\gamma_\varphi^* \widetilde{\omega} = \gamma_\varphi^* p_1^* \omega_1 - \gamma_\varphi^* p_2^* \omega_2 = (p_1 \circ \gamma_\varphi)^* \omega_1 - (p_2 \circ \gamma_\varphi)^* \omega_2 = \omega_1 - \varphi^* \omega_2. \qquad \square$$

Un esempio fondamentale di trasformazione canonica è dto dal flusso di una campo vettoriale su $M$: come è noto, il flusso $\Phi_X$ di un campo $X$ su $M$ definisce una azione differenziabile (gruppo ad un parametro) di $(\mathbf{R}, +)$ sull'insieme dei punti di $M$, in modo che resti definito un omomorfismo di gruppi $\mathbf{R} \to \mathrm{Aut}(M)\colon t \mapsto \Phi_X^t$, diffeomorfismo che manda $p$ nel suo evoluto al tempo $t$, lungo l'unica curva integrale $\gamma - X$, soluzione del sistema differenziale

$$\begin{cases} \gamma_X(0) = x \\ \dot{\gamma}_X(0) = X(x) \end{cases}$$

**Hamiltoniane.** Se $(M, \omega)$ è una varietà simplettica, e $H \in C^\infty(M)$, il suo differenziale è una 1-forma su $M$: grazie alla non degenerazione di $\omega$, esiste un unico campo vettoriale $X_H$ tale che $\omega(X_H, -) = \iota_{X_H}\omega = \mathrm{d}H$.

**Proposizione 1.4.** Per ogni $t \in \mathbf{R}$, il flusso $\Phi_X^t$ preserva la 2-forma $\omega$, o in altre parole $\Phi_X^t$ è un simplettomorfismo.

*Dimostrazione.* $(\Phi_X^t)^*\omega = \omega$ se e solo se $\frac{d}{dt}\big((\Phi_X^t)^*\omega\big) = 0$; ciò accade se e solo se $\mathcal{L}_X\omega = 0$. Ora però grazie alla formula magica di Cartan, $\mathcal{L}_X\omega = \mathrm{d}\iota_{X_H}\omega + \iota_{X_H}\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\mathrm{d}H + \iota_{X_H}0 = 0$. $\square$

Un campo vettoriale come $X$ qui sopra si dice *hamiltoniano*, di funzione hamiltoniana $H$.

Un campo vettoriale $X$ su $M$ tale che $\mathcal{L}_X\omega = 0$ si dice *simplettico* o *localmente hamiltoniano.*

Ogini campo vettoriale lo è (ovviamente) anche localmente. L'ostruzione a che avvenga il contrario è in modo evidente un problema di tipo (co)omologico; tale ostruzione è misurata dalla classe di coomologia $[\iota_X\omega] \in H^1_{\mathrm{dR}}(M)$ (*invariante di Calabi* di $M$). La situazione può in effetti essere riassunta come segue:

> Se $X$ è un campo vettoriale sulla varietà simplettica $(M, \omega)$, sono equivalenti le condizioni seguenti
>
> - $X$ è localmente hamiltoniano;
> - $(\Phi_X^t)^*\omega = \omega$;
> - $\mathcal{L}_X\omega = 0$;
> - $\iota_X\omega$ è una forma chiusa.
>
> Se uno di questi quattro casi si verifica, e se $\iota_X\omega$ è anche esatta, $X$ si dice campo campo hamiltoniano; una qualsiasi primitiva di $\iota_X\omega$ si dirà hamiltoniana di $X$.

Si noti che la condizione $\iota_X\omega = \mathrm{d}H$ è equivalente a $\omega_x(X_H(x), v) = \mathrm{d}H(x)\cdot v$, per ogni $x \in M$, $v \in T_xM$. Tale condizione espressa in coordinate canoniche (di Darboux) ha una forma particolare che ora esprimiamo; se $X_H = a_i\frac{\partial}{\partial q_i} + b_i\frac{\partial}{\partial p_i}$ allora

$$\iota_{X_H}\omega = \iota_{X_H}(\mathrm{d}q_i \wedge \mathrm{d}p_i) = (\iota_{X_H}\mathrm{d}q_i) \wedge \mathrm{d}p_i - \mathrm{d}q_i \wedge (\iota_{X_H}\mathrm{d}p_i) = a_i\mathrm{d}p_i - b_i\mathrm{d}q_i,$$

dunque $\iota_{X_H}\omega = \mathrm{d}H$ se e solo se $a_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ e $b_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$, ossia se e solo se $X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}, -\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) = \mathbb{E}\cdot\nabla H = \operatorname{sgrad} H$ (*gradiente simplettico* di $H$, pure se *non* è coinvolta alcuna struttura riemanniana/metrica).

**Sul gradiente simplettico.** La non degenerazione di $\omega$ offre una identificazione tra gli spazi tangenti (fibra per fibra, che è come dire un isomorfismo di fibrati) e cotangente. Una tale identificazione permette di definire il gradiente simplettico in modo analogo a come si definisce il gradiente scalare, come l'unico campo vettoriale $\nabla^\top f$ tale che $\omega(X, \nabla^\top f) = X(f)$ per ogni campo $X$ liscio su $M$ (guardato agire sulle funzioni $f \in C^\infty(M)$ come una derivazione).

Dunque un campo liscio $X$ si dice hamiltoniano quando $X = nabla^\top H$ per una certa funzione $H \in C^\infty(M)$. Anche la definizione locale si puørifrasare in questo linguaggio.

**Proposizione 1.5.** Un campo vettoriale liscio $X$ su $M$ è localmente hamiltoniano se e solo se ogni $x \in M$ ha un intorno aperto $U$ tale che esita una funzione $H_U$ per cui $X = \nabla^\top H_U$, ossia (prevedibilmente) se $X$ è hamiltoniano in un opportuno intorno di ogni $x \in M$.

*Dimostrazione.* La prova è costruttiva. Supponiamo che $X$ sia localmente hamiltoniano; allora $\frac{d}{dt}\left((\Phi_X^t)^*\omega\right) = 0$, e se scriviamo come $\gamma_X(t)$ la traiettoria della curva integrale di $X$ nel punto $x$, nelle coordinate $(A_i, B_i)$, allora

$$\begin{aligned}
0 = \frac{d}{dt}\omega(\gamma_X(t)) &= \frac{d}{dt}\sum \mathrm{d}p_i(t) \wedge \mathrm{d}q_i(t) = \sum\left(\frac{d}{dt}\mathrm{d}p_i\right) \wedge \mathrm{d}q_i + \\
&+ \sum \mathrm{d}p_i \wedge \left(\frac{d}{dt}\mathrm{d}q_i\right) = \sum\left(\mathrm{d}\frac{dp_i}{dt}\right) \wedge \mathrm{d}q_i + + \sum \mathrm{d}p_i \wedge \left(\mathrm{d}\frac{dq_i}{dt}\right) = \\
&= \sum \mathrm{d}A_i \wedge \mathrm{d}q_i + \sum \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}B_i = \sum\left(\sum \frac{\partial A_i}{\partial p_k}\mathrm{d}p_k + \frac{\partial A_i}{\partial_k}\right) \wedge \mathrm{d}_i + \\
&+ \mathrm{d}p_i \wedge \sum\left(\sum \frac{\partial B_i}{\partial p_k}\mathrm{d}p_k + \frac{\partial B_i}{\partial_k}\mathrm{d}q_k\right) = \sum\left(\frac{\partial A_i}{\partial p_k} + \frac{\partial B_k}{\partial q_i}\right)\mathrm{d}p_k \wedge \mathrm{d}q_i + \\
&+ \sum\left(\frac{\partial A_i}{\partial q_k} - \frac{\partial A_k}{\partial q_i}\right)\mathrm{d}q_k \wedge \mathrm{d}q_i + \sum\left(\frac{\partial B_i}{\partial p_k} - \frac{\partial B_k}{\partial p_i}\right)\mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}p_k
\end{aligned}$$

Dunque devono essere nulli i coefficienti e

$$\frac{\partial A_i}{\partial p_k} = -\frac{\partial B_k}{\partial q_i}; \qquad \frac{\partial A_i}{\partial q_k} = \frac{\partial A_k}{\partial q_i}; \qquad \frac{\partial B_i}{\partial p_k} = \frac{\partial B_k}{\partial p_i}.$$

□

La forma $\alpha$ definita da $\sum\left(-B_i\mathrm{d}p_i + A_i\mathrm{d}q_i\right)$ è quindi chiusa, e il lemma di Poincarè assicura che è localmente esatta; se $H$ è una funzione liscia definita su un intorno $U$ di $x$ tale che $\alpha = \mathrm{d}H$, paragonando i coefficienti si ha

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial q_i} = A_i \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} = -B_i \end{cases} \iff \nabla^\top H = X$$

**Teorema 1.1 :** Una trasformazione canonica $f\colon T^*M \to T^*N$ muta campi vettoriali hamiltoniani $X_H$, associati ad una hamiltoniana $H\colon T^*M \to \mathbf{R}$, in campi vettoriali hamiltoniani associati all'hamiltoniana $K = H \circ f^{-1} = f_*H\colon T^*N \to \mathbf{R}$.

*Dimostrazione.* La tesi equivale a dire che il diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R} & \\ T^*M \arrow[u] \arrow[r, shift left] & T^*N \arrow[l, shift left] \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

è commutativo, o equivalentemente he se $\iota_{X_H}\omega_M = -\mathrm{d}H$, allora $\iota_{Tf(X_H)}\omega_N = -\mathrm{d}K$, con $K = f_*H$. Tale tesi segue dall'osservare che per ogni $v \in TT^*N$, che si può scrivere come $Tf(u)$ per qualche $u \in TT^*M$, si ha

$$\begin{aligned} \iota_{Tf(X_H)}\omega_N(v) &= \langle v, \iota_{Tf(X_H)}\omega_N\rangle \\ &= \langle Tf(X_H) \wedge Tfu, \omega_N\rangle \\ &= \langle Tf(X_H \wedge u), \omega_N\rangle \\ &= \langle X_H \wedge u, f^*\omega_N\rangle \\ &= \langle X_H \wedge u, \omega_M\rangle \\ &= -\mathrm{d}H \cdot u = -\mathrm{d}H(Tf^{-1}(v)) \\ &= -f_*\mathrm{d}H(v) = -\mathrm{d}(f_*H)(v). \end{aligned}$$
□

### 1.3.4 Costruire simplettomorfismi...

#### ...twistando varietà.

Siano $(X_1, \omega_1)$, $(X_2, \omega_2)$ due varietà simplettiche, e indichiamo con $M_i = T^*X_i$ i loro fibrati cotangenti. Nell'identificazione naturale

$$T^*(X_1 \times X_2) \cong M_1 \times M_2$$

anche il prodotto delle de varietà ha una struttura simplettica naturale; in particolare la sua forma di Liouville è data da

$$\theta = p_1^*\theta_1 + p_2^*\theta_2$$

dove $p_i\colon M_1 \times M_2 \to M_i$ è la proiezione naturale. È evidente che la forma $\omega_{M_1 \times M_2}$ è univocamente determinata ad questa scrittura, perché vale $\omega = -\mathrm{d}\theta = \cdots = p_1^*\omega_1 + p_2^*\omega_2$.

Definiamo una involuzione $\sigma_2\colon M_2 \to M_2$, tale che $(x, \xi) \mapsto (x, -\xi)$, e definiamo $\sigma = \mathrm{id}_{M_1} \times \sigma_2\colon M_1 \times M_2 \to M_1 \times M_2$. Se $\bar{\omega}$ indica la forma $p_1^*\omega_1 - p_2^*\omega_3$ è facile osservare che $\sigma^*\bar{\omega} = \omega$. Allora se $Y \subset M_1 \times M_2$ è lagrangiana rispetto a $\omega$, la sua trasformata $\sigma(Y)$ lo è rispetto a $\bar{\omega}$. Si ha dunque che, per costruire un simplettomorfismo $M_1 \to M_2$ bisogna

- Partire con una sottovarietà lagrangiana in $(M_1 \times M_2, \omega)$;
- Twistarlo con la $\sigma$ su definita, per ottenere una s.v. lagrangiana $\sigma Y$ in $(M_1 \times M_2, \bar{\omega})$;
- Controllare se $\sigma Y$ èil grafico di un qualche diffeomorfismo $\varphi\colon M_1 \to M_2$;
- Se lo è, è anche un simplettomorfismo (cfr. Proposizione 1.3).

**. . . con funzioni generatrici.**

Ogni $S \in C^\infty(M_1 \times M_2)$ è una forma chiusa su$X_1 \times X_2$. La *sottovarietà lagrangiana generata da $S$* è il luogo

$$\Lambda_S = \Big\{((x,y), \mathrm{d}S_{(x,y)}) \mid (x,y) \in X_1 \times X_2\Big\}$$

Se chiamiamo

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_x S &= \mathrm{d}S_{(x,y)} \text{ proiettato su } T^*_x X_1 \times \{0_{T^*_y X_2}\} \\ \mathrm{d}_y S &= \mathrm{d}S_{(x,y)} \text{ proiettato su } \{0_{T^*_x X_1}\} \times T^*_y X_2 \end{aligned}$$

possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \Lambda_S &= \Big\{(x, y, \mathrm{d}_x S, \mathrm{d}_y S) \mid (x,y) \in X_1 \times X_2\Big\} \\ \sigma\Lambda_f &= \Big\{(x, y, \mathrm{d}_x S, -\mathrm{d}_y S) \mid (x,y) \in X_1 \times X_2\Big\}. \end{aligned}$$

Con ciò, l'eventuale diffeomorfismo $\varphi$ di cui $\sigma\Lambda_S$ è il grafico è detto *generato* da $S$, che è detta *funzione generatrice* di $\varphi$.

Quando $\Lambda_S$ è davvero il grafico di qualche $\varphi$? Se la condizione essenziale è che

$$\varphi(x,\xi) = (y,\eta), \quad \text{cioè } \; \xi = \mathrm{d}_x S, \; \eta = -\mathrm{d}_y S$$

è evidente che per trovare l'immagine di $(x,\xi)$ mediante $\varphi$ si dovranno risolvere le equazioni di “Hamilton–Jacobi”

$$\begin{cases} \xi = \frac{\partial S}{\partial x} \\ \eta = -\frac{\partial S}{\partial y} \end{cases}$$

Se esiste una soluzione $y = \varphi_1(x,\xi)$, possiamo ottenere $\eta = \varphi_2(x,\xi)$: averla trovata però sottintende il ricorso al teorema delle funzioni implicite, e quindi alla condizione per cui

$$\det\left[\frac{\partial}{\partial y_i}\frac{\partial S}{\partial x_j}\right] \neq 0$$

condizione che, almeno localmente, assicura la risolvibilità del problema.

### 1.3.5 Teorema di Maslov-Hörmander.

Consideriamo una famiglia di funzioni $W\colon M \times U \subseteq M \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ dipendenti da una $k$-upla di parametri $\underline{u} = (u_1, \ldots, u_k)$.

Indichiamo con $E = \{(q,u) \in M \times U \mid \frac{\partial W}{\partial \underline{u}} = 0\}$. Se 0 è un valore regolare di $\frac{\partial W}{\partial \underline{u}}$ (ossia se $\mathrm{d}\frac{\partial W}{\partial \underline{u}}$ è una matrice di rango massimo su $E$),

$$\mathrm{rk}\left(\mathrm{d}\frac{\partial W}{\partial \underline{u}}\right) = \mathrm{rk}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \underline{u}\partial q}\middle|\frac{\partial^2 W}{\partial \underline{u}\partial \underline{u}}\right) = k,$$

allora $\{W\colon M \times U \to \mathbf{R}\}_{\underline{u}\in U}$ è detta *famiglia generatrice* o *famiglia di Morse*.

**Teorema 1.2** [Maslov–Hörmander]**:** Sia $W\colon M\times\mathbf{R}^k\to\mathbf{R}\colon (q_i,u_A)\mapsto W(q_i,u_A)$ una famiglia di funzioni dipendenti dai parametri $u_A=(u_1,\dots,u_k)$, e

$$\Lambda=\Big\{(q,p)\in T^*M \mid \exists u_A\in\mathbf{R}^k\colon \frac{\partial W}{\partial u^B}(q_i,u_A)=0;\ \frac{\partial W}{\partial q_i}=p_i\Big\}$$

Supponiamo che 0 sia un valore regolare per la mappa $(q,u)\mapsto\frac{\partial W}{\partial u}(q,u)$, ossia che

$$\operatorname{rk}\Big(\frac{\partial^2 W}{\partial u\partial q}\Big|\frac{\partial^2 W}{\partial u\partial u}\Big)=k(\text{ massimo}).$$

Allora $\Lambda$ è una sottovarietà lagrangiana di $T^*M$.

Viceversa, se $\Lambda\subset T^*M$ è lagrangiana, e $\lambda_0\in\Lambda$, scrivendo $\pi\circ j$ la mappa

$$\begin{array}{ccccc}\Lambda & \xrightarrow{\ j\ } & T^*M & \xrightarrow{\ \pi\ } & M\\ \lambda & \longmapsto & (q(\lambda),p(\lambda)) & \longmapsto & q(\lambda)\end{array}$$

essa è anche il luogo dei punti

$$\Big\{(q,p)\mid \frac{\partial W}{\partial u}=0,\frac{\partial W}{\partial q}=p\Big\}$$

per qualche $W\colon M\times\mathbf{R}^k\to\mathbf{R}$, $k=\dim M-\operatorname{rk}\big(\mathrm{d}(\pi\circ j)|_{\lambda_0}\big)$

*Dimostrazione.* Le equazioni

$$\begin{cases}\frac{\partial W}{\partial u}(q_i,u_A)=0\\ \frac{\partial W}{\partial q}(q_i,u_A)-p_i=0\end{cases}\qquad\qquad \left(\begin{smallmatrix}A=1,\dots,k\\ i=1,\dots,n\end{smallmatrix}\right)$$

sono quelle di una varietà $\Lambda$ di dimensione $n$: infatti considerando il rango del loro differenziale si ha la matrice $(n+k)\times(2n+k)$

$$\operatorname{rk}\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 W}{\partial q\partial u} & \mathbb{O} & \frac{\partial^2 W}{\partial u\partial u}\\ \frac{\partial^2 W}{\partial q\partial q} & \mathbb{I}_n & \frac{\partial^2 W}{\partial u\partial q}\end{vmatrix}=n+k$$

perché il rango della colonna di destra è massimo per ipotesi, e quello della centrale è $n$.

Dunque $\Lambda$ è una varietà di dimensione

$$\underset{\text{variabili}}{(2n+k)}-\underset{\text{rk del diff.}}{(n+k)}=n.$$

La condizione $\operatorname{rk}\Big(\frac{\partial^2 W}{\partial u\partial q}\Big|\frac{\partial^2 W}{\partial u\partial u}\Big)=k$ dice che le variabili $u_A$ si possono esprimere in funzione delle $(q_i,p_j)$, $u_A=u_A(q_i,p_j)$ non appena $(q,p,u)$ sta in $\Lambda$. Ciò significa che $\Lambda$ è il grafico in $T^*M$ di $(q,p)\mapsto u(q,p)$, ed è dunque una varetà di dimensione $n=\dim\Lambda$.

Ora mostriamo che $j^*\omega = 0$, per $j\colon \Lambda \hookrightarrow T^*M$.

$$\begin{aligned} j^*\theta = p_i \mathrm{d}q_i &= \frac{\partial W}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \lambda_j}\mathrm{d}\lambda_j \\ &= \frac{\partial W}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \lambda}\mathrm{d}\lambda + 0 \text{ nella comoda forma } \frac{\partial W}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \lambda}\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda}\big(W(q(\lambda), p(\lambda), u(\lambda))\big)\mathrm{d}\lambda \\ &= \mathrm{d}W \implies j^*\omega = \mathrm{d}j^*\theta = 0 \end{aligned}$$

(misteriosamente glissando sul fatto che $\frac{\partial W}{\partial p}$ è sparito senza ragione).

Viceversa, se $\Lambda$ è lagrangiana, sia

$$k = \operatorname{rk}\big(\mathrm{d}(\pi \circ j)|_{\lambda_0}\big) = n - k = \operatorname{rk}\frac{\partial q_i}{\partial \lambda_j}$$

Si noti che $j\colon \Lambda \hookrightarrow T^*M$ è una immersione, dunque il suo differenziale ha rango massimo $n$.

Se sottoponiamo $A = \frac{\partial q}{\partial \lambda}$ a decomposizione polare, possiamo scriverla come $\bar{R}_1 S$, dove $\bar{R}_1 \in \mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$ e $S$ è una matrice simmetrica (questa scrittura può non essere unica). Definiamo $\bar{R}_2$ come la matrice ortogonale che diagonalizza $S$: $\bar{R}_2^t S \bar{R}_2 = D$, diagonale (eventualmente con l'autovalore zero e quindi qualche zero in diagonale). Allora $D = R_1 A R_2$, dove $R_1 = \bar{R}_2^t \bar{R}_1$ e $\bar{R}_2 = R_2$.

Ora trasliamo $q = q_0$ in $q = 0$, e operiamo una trasformazione canonica

$$\begin{cases} q' = R_1 q \\ p' = R_1 p = R_1^{-t} p \end{cases}$$

Su $\Lambda$ facciamo la stessa cosa traslando $\lambda_0$ in $\lambda = 0$, e consideriamo il cambio di coordinate $\lambda' = R_2^t \lambda$. In altre parole consideriamo la composizione

$$\Lambda \xrightarrow{\cdot R_2} \Lambda \to M \xrightarrow{R_1 \cdot} M$$

(dove la freccia centrale è la composizione $\pi \circ j$) nella quale $\frac{\partial q'}{\partial \lambda'}$ si scrive $\frac{\partial q'}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial \lambda'} = R_1 A R_2 = D$ diagonale. Dopo aver mostrato che le coordinate si possono scegliere in modo tale che $\frac{\partial q}{\partial \lambda}$ sia diagonale, e dopo averlo fatto, continuiamo a chiamare $q, p, \lambda$ le variabili.

Si noti che $\mathrm{d}j|_0$ è la matrice $2n \times n$ fatta da $\begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial p}{\partial \lambda} \end{pmatrix}$. Scriviamola come segue supponendo di avere riordinato gli indici per avere tutto l'autospazio nullo di $A$ in alto, e ammettendo come convenzione che gli indici latini maiuscoli viaggino tra 1 e $k$ e quelli greci minuscoli tra $k+1$ ed $n$.

$$\begin{pmatrix} \mathbb{O}_k^{(\spadesuit)} & \mathbb{O}_{k,n-k}^{(\heartsuit)} \\ \mathbb{O}_{n-k,k}^{(\heartsuit\heartsuit)} & D \\ \frac{\partial p_A}{\partial \lambda_B} & * \\ \frac{\partial p_\alpha}{\partial \lambda_A} & * \end{pmatrix}$$

Proviamo che $\frac{\partial p_A}{\partial \lambda_B}$ è non degenere, provando che lo è $\frac{\partial p_\alpha}{\partial \lambda_A}$ (la tesi segue dal fatto che $\mathrm{d}j|_0$ deve avere rango massimo).

Ricordando che se $\Lambda$ è lagrangiana, $\omega|_\Lambda = 0$, si ha

$$0 = \mathrm{d}p_i \wedge q_i \Longrightarrow \frac{\partial p_i}{\partial \lambda_l}\frac{\partial q_i}{\partial \lambda_m} - \frac{\partial p_i}{\partial \lambda_m}\frac{\partial q_i}{\partial \lambda_l}$$

e se $l = A, m = \beta$ si ha

$$\frac{\partial p_B}{\partial \lambda_A}\frac{\partial q_B}{\partial \lambda_\beta} + \frac{\partial p_\alpha}{\partial \lambda_A}\frac{\partial q_\alpha}{\partial \lambda_\beta} - \frac{\partial p_B}{\partial \lambda_\beta}\frac{\partial q_B}{\partial \lambda_A} - \frac{\partial p_\alpha}{\partial \lambda_\beta}\frac{\partial q_\alpha}{\partial \lambda_A} = 0$$

Ora, ricordando che

$$\frac{\partial q_B}{\partial \lambda_\beta} = 0 \text{ (sta in } \heartsuit);$$
$$\frac{\partial q_\alpha}{\partial \lambda_\beta} \text{ è la parte diagonale non nulla di } A;$$
$$\frac{\partial q_\alpha}{\partial \lambda_A} = 0 = \frac{\partial q_A}{\partial \lambda_\beta} \text{ (stanno in } \heartsuit\heartsuit \text{ e } \spadesuit);$$

la relazione precedente si semplifica in

$$\frac{\partial p_\alpha}{\partial \lambda_A}\frac{\partial q_\alpha}{\partial \lambda_\beta} = 0$$

che implica (dato che $\frac{\partial q_\alpha}{\partial \lambda_\beta}$ è non degenere) la tesi voluta.

Allora $\Lambda$ si parametrizza con le coordinate $(q_\alpha, p_A)$, dette *coordinate focali*.

Ora, $j^*\theta$ è chiusa (dato che $\Lambda$ è lagrangiana), dunque è una forma localmente esatta. Allora esiste una funzione $F(q^\alpha, p_A)$ tale che

$$j^*\theta = p_i \mathrm{d}q_i|_\Lambda = p_A \mathrm{d}q_A + p_\alpha \mathrm{d}q_\alpha = \mathrm{d}(p_A q_A) - q_A \mathrm{d}p_A + p_\alpha \mathrm{d}q_\alpha = \mathrm{d}\big(p_A q_A + F(q_\alpha, p_A)\big)$$

ossia $\frac{\partial F}{\partial q_\alpha} = p_\alpha$, $\frac{\partial F}{\partial p_A} = -q_A$. Definiamo $W$ come la funzione

$$(q_i, u_A) \mapsto F(q_\alpha, u_A) + q_A \cdot u_A.$$

Allora

$$\begin{cases} p_A = \frac{\partial W}{\partial u_A} = u_A; \\ \frac{\partial W}{\partial u_A} = 0 & \text{perché è } \frac{\partial F}{\partial p_A} + q_A = 0; \\ p_\alpha = \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial F}{\partial q_\alpha}. \end{cases}$$

Verifichiamo che $\mathrm{rk}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial u \partial q}\middle|\frac{\partial^2 W}{\partial u \partial u}\right) = \max$: è sufficiente scrivere

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u_A \partial q_i} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial u_A \partial q_B}\middle|\frac{\partial^2 W}{\partial u_A \partial q_\alpha}\right)$$
$$\frac{\partial^2 W}{\partial u_A \partial u_A} = \frac{\partial^2 F}{\partial p_A \partial p_B}$$

Allora

$$\mathrm{rk}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial u_A \partial q_B}\middle|\frac{\partial^2 W}{\partial u_A \partial q_\alpha}\middle|\frac{\partial^2 F}{\partial p_A \partial p_B}\right) = \mathrm{rk}\left(\mathbb{I}_k\middle|\frac{\partial^2 F}{\partial p_A \partial q_\alpha}\middle|\frac{\partial^2 F}{\partial p_A \partial p_B}\right) = k. \qquad \square$$

## 1.4 Chiacchiere di tipo fisico.

Fissata una hamiltoniana $H\colon T^*M \to \mathbf{R}$ chiamiamo *equazione di Hamilton–Jacobi* relativa ad $H$ la seguente PDE, nella quale l'incognita è una funzione $q \mapsto S(q)$, tale che

$$\begin{cases} H \circ \mathrm{d}S = 0 \\ H\Big(q, \frac{\partial S}{\partial q}\Big) = 0(\star) \end{cases}$$

(una semplice ridefinizione di $H$ porta ad includere anche il caso $H\big(q, \frac{\partial S}{\partial q}\big) = e$ in $(\star)$).

**Osservazione.** Se $q \mapsto S(q)$ è una soluzione ad HJ, l'immagine del differenziale di $S$ è una sottovarietà lagrangiana contenuta in $H^{\leftarrow}(0)$ (o $H^{\leftarrow}(e)$ nel caso generale), che è trasversale alle fibre di $M$.

Una *soluzione geometrica* ad HJ consiste di una sottovarietà lagrangiana $\Lambda \subset H^{\leftarrow}(0)$; il luogo dei punti dove la composizione $j \circ \pi_M : \Lambda \hookrightarrow T^*M \twoheadrightarrow M$ ha una caduta di rango è detto *ciclo di Maslov* della varietà; nell'ambito dell'ottica geometrica tale luogo prende il nome di *caustica* associata alla soluzione geometrica.

Nel caso di ua hamiltoninana $H$ dipendente dal tempo avremo una equazione di Hamilton–Jacobi dipendente dal tempo:

$$\begin{gathered} \mathcal{H}\colon T^*(M \times \mathbf{R}) \to \mathbf{R} \\ (t, q; p_0, p) \mapsto p_0 + H(t, q, p) \end{gathered}$$

per cui l'equazione HJ ha la forma

$$\mathcal{H} \circ \mathrm{d}S = 0; \qquad \frac{\partial S}{\partial t} + H\Big(t, q, \frac{\partial S}{\partial q}\Big)$$

Vale il seguente

**Teorema 1.3 :** Se $\Lambda \subset H^{\leftarrow}(0)$ è lagrangiana, il campo vettoriale hamiltoniano associato ad $H$ gli è tangente.

*Dimostrazione.* Ogni vettore $v \in T_\lambda\Lambda$ è anche tangente a $T_{j(\lambda)}H^{\leftarrow}(0)$, data l'ovvia inclusione $\Lambda \hookrightarrow H^{\leftarrow}(0)$ che diventa inclusione degli spazi tangenti. Perciò $v \in \ker \mathrm{d}H$, dunque $\mathrm{d}H(j(\lambda))v = 0$, ossia $\langle X_H \wedge v, \omega \rangle = 0$ per ogni $v \in T_\lambda\Lambda$. Allora $X_H \in T_\lambda^\top\Lambda = T_\lambda\Lambda$ (per lagrangianezza). □

**Integrali completi per HJ.** Data un hamiltoniana $H\colon T^*M \to \mathbf{R}$ cerchiamo una trasformazione canonica che elimini i momenti, ossia una t.c. $T^*M \to T^*N \ni (q', p')$ che mandi $H(q, p)$ in $K(q')$. Tale trasformazione sarà generata da una funzione $S(q, q')$,

$$H\Big(q, \frac{\partial S}{\partial q}(q, q')\Big) = K(q')$$

che viene detta *integrale completo* relativo all'hamiltoniana $H$. La funzione $S(-)$ è tale che $\operatorname{rk} \frac{\partial^2 S}{\partial q \partial q'} = n$ (il massimo), dunque la varietà

$$\Lambda_{q'} = \Big\{(q, p) \in T^*M \mid p = \frac{\partial S}{\partial q}(q, q')\Big\}$$

è parte di una *foliazione* lagrangiana di $T^*M$, ossia di una partizione $T^*M = \coprod_{q'\in N} \Lambda_{q'}$, localmente diffeomorfa alla foliazione standard di $\mathbf{R}^n$ in $k = \dim \Lambda_{q'}$-piani.

La condizione sul rango di $\frac{\partial^2 S}{\partial q \partial q'}$ assicura che tutte le $\Lambda_{q'}$ sono trasversali alle fibre della proiezione $\pi_M$.

Il Teorema di Jacobi afferma che in presenza di un integrale completo all'equazione di Hamilton-Jacobi, l'equazione differenziale $\dot{x} = X_H(x), \iota_{X_H}\omega = -\mathrm{d}H$ può essere risolta per quadrature.

*Dimostrazione.* Se disponiamo di $S(q, q')$, possiamo definire una trasformazione canonica

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial S}{\partial q}; \\ p' &= -\frac{\partial S}{\partial q'} \end{aligned}$$

e per le condizioni sul rango di $\frac{\partial^2 S}{\partial q \partial q'}$ possiamo invertire la seconda riga in $q = q(q', p')$, e da qui trovare anche un'espressione a $p = p(q', p')$. Le equazioni di Hamilton diventano allora

$$H(q(q', p'), p(q', p')) = K(q')$$

$$\begin{cases} \dot{q}' = \frac{\partial K}{\partial p'} = 0 & \dot{p}' = -\frac{\partial K}{\partial q'} = -\frac{\partial K}{\partial q'} q'_0 \\ q'(t, q'_0, p'_0) = q'_0 & p'(t, q'_0, p'_0) = -\frac{\partial K}{\partial q'}(q'_0)t + p'_0 \end{cases}$$

Ciò risolve completamente i moti, perché ora si risale a $(q(t), p(t))$ per inversione. □

### 1.4.1 Problema di Cauchy classico.

Sia $M$ una varietà fissata. Il *problema di Cauchy* relativo ai dati iniziali $\{j\colon \Sigma \hookrightarrow M, \sigma\colon \Sigma \to \mathbf{R}\}$ consiste nel determinare una funzione liscia $S\colon M \to \mathbf{R}$ tale che

$$\begin{cases} H \circ \mathrm{d}S = e \\ j^* S = \sigma \end{cases}$$

(si osseri che la prima condizione significa che localmente $H\Big(q, \frac{\partial S}{\partial q}\Big) = e$.)

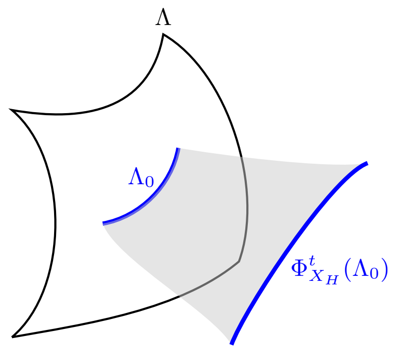
La natura geometrica della soluzione al problema HJ ci porta a considerare l'eventualità di formulare geometricamente la soluzione al problema classico di Cauchy. Partendo da $\Sigma$ e $\sigma$ costruiamo la sottovarietà lagrangiana dei dati iniziali

$$L_{\Sigma,\sigma} = \Big\{p \in T^*M \mid \mathrm{d}\sigma(v) = p(TJ(v)), \quad v \in T\Sigma, \pi_M(p) = \tau_M(v)\Big\}$$

Il problema iniziale si può allora enunciare come segue

> Sia $L_{\Sigma,\sigma}$ la varietà dei dati iniziali di un problema di Cauchy relativo a $\Sigma, \sigma$. Si vuole trovare una sottovarietà lagrangiana connessa $\Lambda \subset T^*M$ tale che
>
> $$\begin{cases} \Lambda \subset H^{\leftarrow}(e); & (i) \\ \pi_M(\Lambda \cap L_{\Sigma,\sigma}) = \Sigma. & (ii) \end{cases}$$

**Definizione 1.8 :** Definiamo la varietà $\Lambda_0^{(n-1)} = H^{\leftarrow}(e) \cap L_{\Sigma,\sigma}$. Se essa è *trasversale* al campo hamiltoniano $X_H$ (ossia per ogni $x \in \Lambda_0^{(n-1)}$ si ha $X_H(x) \notin T_x\Lambda_0^{(n-1)}$, ossia le linee di flusso di $X_H$ sono trasversali a $\Lambda_0^{(n-1)}$; si veda la figura sotto) i dati si dicono *non-caratteristici.*




**Teorema 1.4 :** Se i dati sono non-caratteristici, la soluzione al problema di Cauchy geometrico esiste ed è

$$\Lambda = \bigcup_{t\in\mathbf{R}} \Phi^t_{X_H}\left(\Lambda_0^{(n-1)}\right).$$

*Dimostrazione.* Le curve integrali del campo hamiltoniano $X_H$ giacciono tutte all'interno dell'ipersuperficie di livello $H^{\leftarrow}(e)$ (questa è l'interpretazione geometrica del fatto che il sistema hamiltoniano definito da $X_H$ ha sempre almeno una costante del moto, l'hamiltoniana stessa), dunque è immediato notare che $\Lambda$ è anch'essa contenuta in tale ipersuperficie e soddisfa alla condizione $(ii)$ sopra.

Il resto della prova consiste nel mostrare che $\Lambda$ è lagrangiana. Si osservi che per ogni $x \in \Lambda$ esiste un $t \in \mathbf{R}$ e un $y \in \Lambda_0^{(n-1)}$ tali che $\Phi^t_{X_H}(y) = x$. Si osservi anche che $T_x\Lambda$ può essere ricostruito come

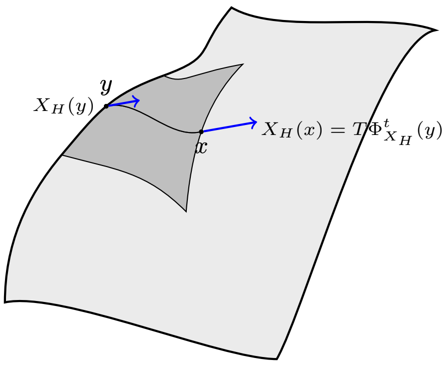
$$T_x\Lambda = T_x\left(\Phi^t_{X_H}(\Lambda_0^{(n-1)})\right) \oplus \operatorname{span}\{X_H(x)\}$$

e che il flusso $\Phi^t_{X_H}$, in quanto diffeomorfismo dello spazio delle fasi, agisce diffeomorficamente anche su $\Lambda$, e manda curve non caratteristiche in curve non caratteristiche, dato che

$$T\Phi^t_{X_H}\big(X_H(y)\big) = X_H\big(\Phi^t_{X_H}(y)\big) = X_H(x).$$

Questo si nota sviluppando in due modi $\frac{d}{ds}\big|_{s=0}\Phi^{t+s}_{X_H}(y)$

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\Phi^{t+s}_{X_H}(y) = \frac{d}{ds}\big(\Phi^t_{X_H}\circ\Phi^s_{X_H}(y)\big) = T\Phi^t_{X_H}(y)$$
$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\Phi^{t+s}_{X_H}(y) = X_H\big(\Phi^t_{X_H}(y)\big).$$




Dobbiamo ora provare che $\omega|_\Lambda = 0$. Data la particolare natura di $T_x\Lambda$, questo è vero:

- Se $v_1, v_2$ sono due vettori in span $\{X_H(x)\}$, ovviamente $\omega(v_1, v_2) = 0$, dato che essi sono linearmente dipendenti.
- Se $v \in$ span $\{X_H(x)\}$ e $u \in T_x\big(\Phi^t_{X_H}(\Lambda_0^{(n-1)})\big)$, si ha

$$\omega(v, u) = \omega(\alpha X_H, u) = -\alpha \mathrm{d}H(x).u = 0$$

  dato che $u \in \ker \mathrm{d}H$ (lo spazio tangente in $x$ ad $H^{\leftarrow}(e)$ si identifica per noti motivi al nucleo di $\mathrm{d}H(x)$).
- Genericamente allora

$$\omega(u_1, u_2) = \omega(T\Phi^t_{X_H}\bar{u}_1, T\Phi^t_{X_H}\bar{u}_2) = (T\Phi^t_{X_H})^*\omega(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = \omega(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$$

  per due vettori $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ in $T_{y=\Phi^{-t}_{X_H}(x)}\Lambda_0^{(n-1)}$: ma ora $\omega|_{\Lambda_0^{(n-1)}} = 0$, perché $\Lambda_0^{(n-1)} = H^{\leftarrow}(e) \cap L_{\Sigma,\sigma}$ e $L_{\Sigma,\sigma}$ è lagrangiana. □

Supponiamo ora che la varietà di partenza sia lo spazio-tempo $M = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$ e poniamo $n = N + 1$. Consideriamo una hamiltoniana del tipo

$$\mathcal{H}(t, q, p_0, p) = p_0 + H(t, q, p)$$

dove $q = (q_1, \dots, q_n)$, $p = (p_1, \dots, p_n)$ e $p_0$ è il momento coniugato al tempo $t$. Il problema HJ in questo setting si riscrive con le equazioni

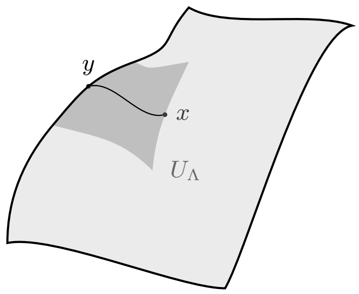
$$\mathcal{H} \circ \mathrm{d}S = 0, \quad \text{i.e. } \tfrac{\partial S}{\partial t} + H\big(t, q, \tfrac{\partial S}{\partial q}\big)$$

e col problema geometrico di trovare una s.v. lagrangiana associata ai dati iniziali

$$\Sigma \hookrightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N : \chi \mapsto (t, \chi)$$
$$\sigma \colon \Sigma \to \mathbf{R} \colon \chi \mapsto \sigma(\chi)$$

A certe ipotesi topologiche, la soluzione $\Lambda$ al problema geometrico si può parametrizzare grazie a una famiglia di Morse, in qualche aperto semplicemente connesso $U_\Lambda \subset \Lambda$, che non contiene punti singolari (ossia, come altrove, trasversale alle fibre di $\pi_M$) e tale che per ogni $x \in U_\Lambda$ tutta la linea di flusso che va da $y = (\Phi^t_{X_H})^{-1}(x)$ ad $x$ sta in $U_\Lambda$. $U_\Lambda$ ha la struttura di una "striscia"

$$U_\Lambda = \bigcup_{t \in [t_0, t_1]} \Phi^{t \geq t_0}_{X_H}(\lambda_0^N).$$




La funzione desiderata (che per essere una famiglia di Morse e una soluzione ad HJ geometrico allo stesso tempo, deve esserepriva di parametri) sarà una primitiva della 1-forma di Liouville $\theta|_\Lambda$.

Ora, $\theta|_\Lambda = j^*\theta$ è chiusa, perché $\Lambda$ è lagrangiana, e dato che $U_\Lambda$ è semplicemente connesso è anche esatta, e una sua primitiva (a meno di una costante additiva) si ottiene integrandola su un opportuno cammino $\gamma$. Per come è stato scelto $U_\Lambda$, per ogni $x$ esiste un solo $y \in \Lambda_0^N$ tale che $\Phi^t(y) = x$. Il punto $y$ si scrive come

$$y = \left(t_0, \chi; -H(t_0, \chi, \tfrac{\partial\sigma}{\partial q}), \tfrac{\partial\sigma}{\partial q}\right)$$

Indichiamo con $\tau \mapsto \big(\tau, q(\tau); -H(\tau, q(\tau,\chi), p(\tau,\chi)), p(\tau,\chi)\big)$ la curva che unisce $y$ e $x$, e risolve le equazioni di Hamilton.

**C'è ancora qualcosa da dire!**

### 1.4.2 Calcolo delle Variazioni.

#### Trasformata di Legendre.

Sia $M$ una varietà di dimensione $n$ (per semplicità pensiamo a $M = \mathbf{R}^n$). Consideriamo una *lagrangiana*

$$L\colon \mathbf{R} \times TM \to \mathbf{R}$$
$$(t, q, \dot q) \mapsto L(t, q, \dot q)$$

La funzione $L(-)$ si dice $C^2$*-uniformemente* $\dot q$*-convessa* se per ogni $(t, q, \dot q)$ esiste un $k > 0$ tale che

$$\lambda_i \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_i \partial \dot q_j} \lambda_j \geq k|\underline{\lambda}|^2$$

per ogni $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, ossia se l'hessiana di $L(-)$ è definita positiva e il valore $\underline{\lambda} \cdot \mathrm{Hess}(L)\underline{\lambda} \geq k|\underline{\lambda}|^2$. Denotiamo questa situazione dicendo brevemente che $L(-)$ è $\dot q$-UC.

Se questo è il caso, la posizione

$$p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}(t, q, \dot q) \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

definisce un diffeomorfismo globale $\mathbf{R} \times TM \to \mathbf{R} \times T^*M$ detto *trasformata di Legendre* di $L(-)$. Esso lega le equazioni di Lagrange relative ad $L(-)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ $(i = frm[o]--dots, n)$ alle equazioni di Hamilton

$$\begin{cases} \dot q = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot p = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

relative alla *funzione hamiltoniana* $H(t,q,p) = \sup_{\dot q}\big(\dot q \cdot p - L(t,q,\dot q)\big)$.

La variabile $\dot q$ è pensata funzione della terna $(t,q,p)$, e più precisamente è l'inversa globale di $p\colon (t,q,\dot q) \mapsto p(t,q,\dot q)$, $\dot q(t,q,p)$. Se, per evitare confusioni, chiamiamo $(t,q,p) \mapsto S(t,q,p)$ tale inversa,

$$H(t,q,p) = p \cdot S(t,q,p) - L\big(t,q,S(t,q,p)\big)$$

Si può caratterizzare più geometricamente l'operazione di trasformata di Legendre, partendo con una funzione convessa $f(-)$ (ossia tale che $f''(-) > 0$) di una variabile (la generalizzazione è semplice), e per ogni $p$ fissato considerando la retta $v = pu$ nel piano $uv$, e la distanza (in verticale) tra tale retta e il grafico della funzione $p \cdot u - f(u)$. Grazie all'ipotesi di convessità esiste un unico $u$ che massimizza questa distanza, e cioè $u\colon f'(u) = p$. Tale $u$ quindi può essere pensato come l'immagine di una funzione $p \mapsto g(p) = u$, tale che $f'(g(p)) = p$. Questa $g(-)$ è esattamente la trasformata di Legendre di $f(-)$.

Dalla definizione "analitica" di $H(-)$ segue la disuguaglianza

$$\dot q \cdot p \le L + H$$

detta *disugugaglianza di Young* (ancora una volta $L(-)$ è funzione di $(t,q,p)$ mediante $\dot q = S(t,q,p)$).

### Teoria di Poincarè–Cartan.

Sia $\tilde M$ la varietà *spaziotempo* $M \times \mathbf{R}$ (se come prima $M = \mathbf{R}^n$, $\tilde M = \mathbf{R}^{n+1}$). Le coordinate su $\tilde M$ si scrivono $(t,q;p_o,p)$ in modo che $p_0$ sia il momento coniugato al tempo.

La 1-forma di Liouville che definisce su $T^*\tilde M$ una struttura simplettica si scrive allora

$$\theta = \sum p_i \cdot \mathrm{d}q_i + p_0 \mathrm{d}t$$

e la 2-forma canonica $\omega = \mathrm{d}\theta$ si scrive

$$\omega = \sum \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q_i + \mathrm{d}p_0 \wedge \mathrm{d}t.$$

Si ricordi, per fissare le notazioni, che una sottvarietà lagrangiana di $T^*\tilde M$ è una varietà $\Lambda$ tale che $\dim \Lambda = \frac{1}{2} \dim \tilde M$ e $i^*\omega = 0$, se $i\colon \Lambda \subset T^*\tilde M$ è l'inclusione.

Un campo vettoriale $X$ su $\tilde M$ si dice poi hamiltoniano se la 1-forma $\iota_X \omega$ è esatta. Una sua primitiva $H(-)$ si dice *hamiltoniana* del campo vettoriale $X$.

Consideriamo nel seguito hamiltoniane della forma particolare

$$\mathcal{H}(t,q;p_0,p) = p_0 + H_0(t,q,p)$$

Le equazioni di Hamilton relative ad una tale $\mathcal{H}$ si scrivono

$$\begin{cases} \dot t = \dfrac{\partial H_0}{\partial p_0} = 1 & \dot p_0 = -\dfrac{\partial H_0}{\partial t} \\ \dot q_i = \dfrac{\partial H_0}{\partial p_i} & \dot p_i = -\dfrac{\partial H_0}{\partial q_i}. \end{cases}$$

Inoltre, consideriamo sottovarietà lagrangiane di $T^*\tilde M$ dentro $\mathcal{H}^{\leftarrow}(0)$, ossia delle $\Lambda \subset T^*\tilde M$ tali che $p_0 = -H_0(t,q,p)$.

**Teorema 1.5** [Poincaré–Cartan]**:** Sia $\Lambda \subset T^*\tilde{M}$ una sottovarietà lagrangiana di dimensione $n+1$ in $\mathcal{H}^{\leftarrow}(0)$. Se $P_1, P_2$ sono due punti di $\Lambda$ e $(t_1, q_1), (t_2, q_2)$ rispettivamente le loro proiezioni da $T^*\tilde{M}$ a $\tilde{M}$, $\gamma_1, \gamma_2$ curve omotope da $P_1$ a $P_2$ i cui supporti stanno in $\Lambda$. A tali ipotesi

$$\int_{\gamma_1} p\mathrm{d}q - H_0\mathrm{d}t = \int_{\gamma_2} p\mathrm{d}q - H_0\mathrm{d}t$$

(su $\mathcal{H}^{\leftarrow}(0)$ è come dire $\int_{\gamma_1} \theta = \int_{\gamma_2} \theta$).

*Dimostrazione.* (I supporti del)le curve $\gamma_1$ e $\gamma_2$ sono varietà cobordanti in $M\Lambda$, ossia esiste una sottovarietà $\sigma$ di dimensionme 2 che ha per bordo $\gamma_1 \cup \overline{\gamma_2}$ ($\gamma_2$ è percorso in senso opposto). Essendo tale $\sigma$ contenuta in $\Lambda$, $\mathrm{d}\theta|_\sigma = 0$, dunque

$$0 = \int_\sigma \mathrm{d}\theta = \int_{\partial\sigma} \theta = \int_{\gamma_1 \cup \overline{\gamma_2}} \theta = \int_{\gamma_1} \theta - \int_{\gamma_2} \theta. \qquad \square$$

## Punti coniugati.

Vogliamo trovare una $\Lambda \subset \mathcal{H}^{\leftarrow}(0)$, lagrangiana, contenente il rialzamento a $T^*\tilde{M}$ di una curva $q(-)$ che stazionarizza il funzionale di azione (e quindi potrebbe essere un minimo). Vorremmo anche che tale $\gamma$ sia trasversale a $\tilde{M}$ (=alle fibre della proiezione $\pi\colon T^*M \to M$).

A tale ipotesi $\pi(\Lambda)$ è un intorno aperto (diciamo $U$) della curva $t \mapsto (t, q(t))$ in $\tilde{M} = \mathbf{R}^{n+1}$.

L'idea è: rialziamo varie curve giacenti in $U$ che hanno gli stessi estremi di $(q(t), t)$ a delle curve $\{\gamma_i\}$ giacenti in $\Lambda$. La disuguaglianza di Young e il Teorema di Poincaré–Cartan proveranno allora che $q(-)$ minimizza il funzionale di azione $J[-]$.

Siano allora $[t_0, t_1]$ l'intervallo di definizione di $q(-)$ e

$$\begin{gathered} p(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}} L(t, q(t), \dot{q}(t)) \\ \gamma\colon t \mapsto (t, q(t);\ -H_0(t, q, p), p(t)). \end{gathered}$$

Abbandonando (per alleggerire la notazione) la distinzione tra variabili spaziali e temporale, scriviamo $x(t) = (q(t), p(t)) = (t, q_1(t), \dots, q_n(t), p_0(t), p_1(t), \dots, p_n(t))$.

Definiamo una sottovarietà lagrangiana con una parametrizzazione della forma seguente: $(t, v) \in [t_0, t_1] \times B(0, 1[ \to \mathbf{R}^{2n} \ni x(t) + f(t, v)$, dove $f\colon [t_0, t_1] \times B(0, 1[ \to \mathbf{R}^{2n}$ è tale che $f(t, 0) = 0$ per ogni $t \in ]t_0, t_1[$.

Una siffatta parametrizzazione deve essere tale che

- $t \mapsto x(t) + f(t, v)$ risolve le equazioni di Hamilton per ogni $v$ fissato;
- $t \mapsto x(t) + f(t, v)$ sia trasversale alle fibre di $\pi\colon T^*\tilde{M} \to \tilde{M}$ per ogni $v$ fissato.

La prima condizione si traduce nella richiesta che per ogni $v$ fissato

$$\frac{d}{dt}\big(x(t) + f(t, v)\big) = \mathbb{E} \cdot \nabla_x H_0(x(t) + f(t, v))$$

Queste equazioni si linearizzano nel modo che segue: nell'espressione che definisce $\Lambda$ attorno al punto $x(t)$, sostituiamo $v$ con $\lambda v$, definiamo $h(t, v) := \frac{\partial}{\partial \lambda}\big|_{\lambda=0} f(t, \lambda v)$ e deriviamo in $\partial\lambda$ ambo i lati nell'equazione appena scritta. Si ha

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=0}\Big(\dot{x}+\frac{\partial f}{\partial t}\Big)=\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{dh}{dt}=\dot{h}$$

$$\mathbb{E}\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=0}\nabla_x H_0\big(x(t)+f(t,\lambda v)\big)=$$

$$\mathbb{E}\nabla^2_{xx}H_0\big(x(t)+f(t,0)\big)\frac{\partial}{\partial\lambda}\big(x+f(t,v)\big)=\mathbb{E}\nabla^2_{xx}H_0\big(x(t)+f(t,0)\big)\cdot h(t,v);$$

$$\boxed{\dot{h}=\mathbb{E}\nabla^2_{xx}H_0(x(t))\cdot h(t,v)}$$

Se la parametrizzazione cercata si scrive $x(t,v)=x(t)+f(t,v)=\begin{pmatrix} q(t)+Q(t) \\ p(t)+P(t)\end{pmatrix}$, con $Q(t,0)=0=P(t,0)$ per ogni $t$, la condizione di trasversalità alle fibre di $T^*M\to M$ consiste nel chiedere che il rango del differenziale di $(t,v)\mapsto(t,q(t)+Q(t))$ sia massimo lungo la soluzione $x(t)$. Ciò però equivale a dire che

$$\det\begin{pmatrix}1 & 0^t\\ * & \frac{\partial Q}{\partial v}\end{pmatrix}=\det\frac{\partial Q}{\partial v}\Big|_{v=0}\neq 0.$$

Se le condizioni iniziali del problema non lineare sono

$$Q(t_0,v)=0 \qquad\qquad P(t_0,v)=v$$

quelle del problema linearizzato sono (per $h(t,v)=(h_q(t,v),h_p(t,v)))$

$$h_q(t_0,v)=0 \qquad\qquad h_p(t_0,v)=v.$$

La trasversalità è equivalente a chiedere quanto segue: il problema linearizzato $\dot{h}(t,v)=Ah(t,v)$ ha soluzioni mai nulle nelle $q$, per ogni scelta di $v\neq 0$ in $B(0,1[$, ossia $\frac{\partial Q}{\partial v}(t,0)v\neq 0$ per ogni $t\in]t_0,t_1[$ e $v\neq 0$.

Se il punto $q_0$ è l'unico in cui la soluzione $h_q(t)$ del problema linearizzato si annulla, la traiettoria supporto di $q(-)$ si dice *senza punti coniugati.* Se invece accade il contrario, in un punto $q(t^*)$, quest'ultimo si dice coniugato a $q_0=q(t_0)$.

Possiamo formulare il seguente

**Teorema 1.6 :** Sia $L\colon\mathbf{R}\times TM\to\mathbf{R}\colon(t,q\dot{q})\mapsto L(t,q,\dot{q})$ una lagrangiana $C^2$-uniformemente $\dot{q}$-convessa. Definiamo l'insieme delle curve a estremi fissi nell'intervallo $I=[t_0,t_1]$,

$$\Gamma(I,q_0,q_1):=\big\{t\mapsto q(t)\in C^2(I,\mathbf{R}^{n+1})\mid q(t_0)=q_0,q(t_1)=q_1\big\}$$

e il funzionale d'azione

$$J[-]\colon\Gamma(I,q_0,q_1)\to\mathbf{R}\colon q(-)\mapsto\int_I L(t,q(t),\dot{q}(t))\mathrm{d}t$$

Se $q(-)$ è una curva che stazionarizza $J[-]$, ed è priva di punti coniugati, allora è un minimo locale di $J[-]$.

*Dimostrazione.* Partendo da $t\mapsto q(t)$ esiste una e una sola curva $(q(-),p(-))$ rialzamento di $T^*\tilde{M}$, a supporto contenuto in $\mathcal{H}^{\leftarrow}(0)$ per l'hamiltoniana $\mathcal{H}=p_0+H_0$.

L'assenza di punti coniugati equivale alla trasversalità rispetto alle fibre di $\pi\colon T^*\tilde{M} \to \tilde{M}$, grazie alla quale possiamo definire una sottovarietà lagrangiana $\Lambda$ tale che $\pi(\Lambda) = U$ sia un intorno aperto di $(t, q(t))$.

Se $\bar{q}(-)$ è un'altra curva qualsiasi in $\Gamma(I, q_0, q_1)$, il cui supporto è contenuto in $U$, anche $\bar{q}(-)$ ha un unico rialzamento in $T^*\tilde{M}$, il cui supporto sta in $\Lambda$. Si ricordi la disuguaglianza di Young, per cui $\dot{q} \cdot p \leq L(t, q, \dot{q}) + \mathcal{H}(t, q, p)$: l'uguaglianza vale se e solo se le variabili sono correlate da una trasformata di Legendre. In tal caso

$$\int_\gamma p\mathrm{d}q - H_0\mathrm{d}t = \int_\gamma L(t, q, \dot{q})\mathrm{d}t \qquad \int_{\bar{\gamma}} p\mathrm{d}q - H_0\mathrm{d}t \leq \int_{\bar{\gamma}} L(t, q, \dot{q})\mathrm{d}t.$$

Ma il teorema di Poincaré–Cartan dice che

$$\int_\gamma p\mathrm{d}q - H_0\mathrm{d}t = \int_{\bar{\gamma}} p\mathrm{d}q - H_0\mathrm{d}t$$

dunque

$$\begin{aligned} J[q] &= \int_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q})\mathrm{d}t = \int_\gamma p\mathrm{d}q - H_0\mathrm{d}t \\ &= \int_{\bar{\gamma}} p\mathrm{d}q - H_0\mathrm{d}t \leq \int_{\bar{\gamma}} L(t, q, \dot{q})\mathrm{d}t = J[\bar{q}]. \end{aligned}$$ □

### 1.4.3 Crash Course di Coomologia di de Rham.

$M$ è nel seguito una varietà liscia. Ancora, superate le definizioni di base, per tutto quanto è citato nel seguito e necessita di una dimostrazione, si rimanda ad un qualsiasi libro di topologia algebrica e/o geometria differenziale.

**Definizione 1.9 :** Una forma differenziale $\omega\colon M \to \bigwedge_k(M)$ si dice *chiusa* se $d\omega = 0$ ($d$ è il differenziale esterno). Si dice *esatta* se esiste una $(k-1)$-forma $\eta$ tale che $\omega = d\eta$.

Ogni forma esatta è chiusa, dato che $dd = 0$.

Si faccia il pullback $p^*\omega(r, \theta)$ della forma (definita sul piano bucato)

$$\omega(x, y) = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

con le coordinate polari $x = p_1(,\theta) = r\cos\theta$, $y = p_2(,\theta) = r\sin\theta$, e si calcoli la derivata esterna (deve venire la forma angolo $d\theta$, chiusa ma non esatta).

Le $k$-forme esatte sono un sottospazio vettoriale $B_k$ dello spazio delle $k$-forme chiuse $Z_k$, a sua volta sottospazio di $\Omega_r(M)$ (si verifichi che sono sottospazi).

Definiamo il $k$-esimo gruppo di coomologia (di de Rham) come

$$Z_k/B_k = H^k(M) = \frac{\ker(d\colon \Omega_k \to \Omega_{k+1})}{\operatorname{im}(d\colon \Omega_{k-1} \to \Omega_k)}$$

La corrispondenza che manda una varietà nel suo k-esimo gruppo di coomologia è un funtore: si definisca l'azione sulle mappe di varietà lisce $f\colon M \to N$ (si deve usare il pull-back di $f$, $f^*\colon \Omega_k(N) \to \Omega_k(M)$).

Due mappe di varietà $f, g \colon M \to N$ si dicono *omotope* se esiste una applicazione $\mathbb{R}$-lineare $h \colon \Omega_k(N) \to \Omega_k(M)$ tale che

$$d \circ h + h \circ d = g^* - f^*$$

Si dimostri che mappe omotope in senso topologico sono omotope in questo senso e che mappe omotope inducono la stessa coomologia in ogni grado (la relazione che definisce l'essere omotope implica che $(f^* - g^*)\omega \in \ker d$ per ogni $\omega$).

**Definizione 1.10 :** Un *complesso di cocatene* consiste di una famiglia di spazi vettoriali $X_n$ e applicazioni lineari $d_n \colon X_n \to X_{n+1}$ tali che $d_n \circ d_{n-1} = 0$ per ogni $n$.

**Definizione 1.11 :** Una *mappa di cocatene* tra i complessi $(\mathcal{X}, d_X)$ e $(\mathcal{Y}, d_Y)$ consiste di una famiglia di applicazioni $f_n \colon X_n \to Y_n$, una per ogni $n$, tali che $d \circ f = f \circ d \colon X_n \to Y_{n+1}$.

**Definizione 1.12 :** Una *sequenza esatta corta di complessi di cocatene* consiste di una famiglia di sequenze esatte $0 \to A_n \to B_n \to C_n \to 0$, una per ogni $n$. Si indica con $0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C} \to 0$.

**Lemma 1.1 :** Data una sequenza esatta corta di complessi come sopra, $0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C} \to 0$, esiste una *sequenza esatta lunga* in coomologia, ossia una mappa $\delta \colon H^{n-1}(\mathcal{C}) \to H^n(\mathcal{A})$ tale che la sequenza

$$\cdots \to H^{n-1}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\delta} H^n(\mathcal{A}) \to H^n(\mathcal{B}) \to H^n(\mathcal{C}) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(\mathcal{A}) \to \cdots$$

Sia $M$ una varietà liscia, $U, V$ due suoi aperti. Si considerino le inclusioni $k : U \subset M$, $l : V \subset M$, $i : U \cap V \subset U$, $j : U \cap V \subset V$. Queste mappe ne inducono altre in coomologia, e coincidono con le restrizioni delle classi nei gruppi di coomologia ai sottospazi $U, V, U \cap V$. Definiamo $k^* \oplus l^* \colon \Omega_k(M) \to \Omega_k(U) \oplus \Omega_k(V) \colon \omega \mapsto (k^*\omega, l^*\omega)$ e $i^* - j^* \colon \Omega_k(U)) \oplus \Omega_k(V) \to \Omega_k(U \cap V) \colon (\omega, \eta) \mapsto i^*\omega - j^*\eta$.

**Lemma 1.2 :** Esiste una sequenza esatta

$$\cdots \xrightarrow{\sigma} H^k(M) \xrightarrow{k^* \oplus l^*} H^k(U) \oplus H^k(V) \xrightarrow{i^* - j^*} H^k(U \cap V) \xrightarrow{\sigma} H^{k+1}(M) \to \cdots$$

**Proposizione 1.6.** Se $M$ è una varietà connessa, $H^0(M) \cong \mathbb{R}$. Si dimostri questo fatto ricordando cos'è una 0-forma definita su $M$.

**Proposizione 1.7.** Se $U \subset M$ è un aperto semplicemente connesso, $H^k(U) = 0$ per ogni $0 \leq k \leq n$.

**Proposizione 1.8.** Se $M$ è una varietà di dimensione zero, fatta da un insieme discreto di punti, $H^0(M) = \prod_{\alpha \in A} \mathbb{R}$, dove A è un insieme della stessa cardinalità di $M$.

Il lemma di Mayer-Vietoris permette di svolgere la maggior parte dei conti nel computare i gruppi di coomologia di varietà (per esempio le sfere, i tori, i tori generalizzati, etc.).

**Coomologia Relativa.** Definiamo la coomologia di de Rham di $X$ relativamente alla mappa $f\colon Y \to X$ (o relativamente a $Y$ attraverso $f\colon X \to Y$) nel modo che segue.

Definiamo il complesso

$$\Omega^r(f) = \Omega^r(X,Y) = \Omega^r(X) \oplus \Omega^{r-1}(Y)$$

dotato del differenziale $d_f\colon \Omega^r(f) \to \Omega^{r+1}(f)$ definito da

$$d_f(\omega,\theta) = (d\omega, f^*\omega - d\theta)$$

Si verifichi che con questa definizione $d \circ d = 0$ e dunque

$$0 \to \Omega^0(f) \to \Omega^1(f) \to \ldots \to \Omega^{r-1}(f) \to \Omega^r(f) \to 0$$

è un complesso di cocatene.

Definiamo grazie a questo fatto i sottospazi

$$\begin{cases} B^r(f) := \operatorname{im} d_f^{r-1} \\ Z^r(f) := \ker d_f^r \end{cases}$$

e l'$r$-esimo *gruppo di coomologia relativa* come il quoziente $H^r(f) := Z^r(f)/B^r(f)$.

Una classe di coomologia in $\Omega^\bullet(f)$ è rappresentata da una forma chiusa su $X$ che diventa esatta quando viene "tirata indietro" a $Y$; C'è una semplice interpretazione geometrica di quello che accade?

Per definizione disponiamo di una sequenza esatta

$$0 \to \Omega^{r-1}(Y) \xrightarrow{\alpha} \Omega^r(f) \xrightarrow{\beta} \Omega^r(X) \to 0$$

dove $\alpha\colon \theta \mapsto (0,\theta)$ e $\beta(\omega,\theta) = \omega$. Si dimostri che $d_f \circ \alpha = -\alpha \circ d_Y$, e si trovino omomorfismi di spazi vettoriali $\operatorname{coker}(-d_Y) \to \ker(-d_Y)$, $\operatorname{coker} d_f \to \ker d_f$ e $\operatorname{coker} d_X \to \ker d_X$. Grazie al Lemma del serpente, ora, è possibile dedurre la presenza di una sequenza esatta lunga

$$\cdots H^{r-1}(Y) \to H^r(f) \to H^r(X) \xrightarrow{\star} H^r(Y) \to \cdots$$

Si mostri che se $Z \subset Y \subset X$ e se si chiamano, rispettivamente, $i\colon Z \to Y$, $j\colon Y \to X$ le inclusioni, allora esiste una sequenza esatta

$$H^\bullet(i) \xrightarrow{i^*} H^\bullet(j \circ i) \xrightarrow{j^*} H^\bullet(j)$$

ossia per ogni grado $r \geq 0$ esiste una sequenza esatta $H^r(i) \xrightarrow{i^*} H^r(j \circ i) \xrightarrow{j^*} H^r(j)$ tale che $\operatorname{im} i^* = \ker j^*$.

Dalla funtorialità di $H^\bullet(-,-)$ sulle coppie di spazi, dove gli isomorfismi $(X, Y, f\colon Y \to X) \to (X', Y', f'\colon Y' \to X')$ sono definiti come coppie di omeomorfismi $X \to X'$, $Y \to Y'$, discende naturalmente il

**Corollario.** Se $f\colon (X,Y) \to (X',Y')$ è un isomorfismo tra coppie di spazi, allora $H(Y,X) \cong H(Y',X')$ (come gruppi abeliani, o meglio $\mathbf{R}$-moduli graduati).

**Corollario.** Se una coppia di spazi $(X,Y)$ è tale che esiste un diffeomorfismo $f\colon Y \to X$, allora $H^\bullet(Y,X) = (0)$.

Per provarlo è sufficiente applicare il corollario precedente a

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, dash] \\ X \arrow[r, dash] & X \end{tikzcd}$$

**Teorema 1.7 :** Siano $Z \subset Y \subset X$ tre spazi topologici, e $i\colon Z \subset Y$, $j\colon Y \subset X$ le inclusioni canoniche. Allora la sequenza

$$H^\bullet(X,Y) \xrightarrow{i^*} H^\bullet(X,Z) \xrightarrow{j^*} H^\bullet(Y,Z)$$

(Una dimostrazione sta in Bott-Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*).

La coomologia di de Rham relativa gode delle proprietà di una teoria coomologica nel senso di Eilenberg e Steenrod: in particolare si verifica la proprietà di escissione

> Data una coppia di spazi $(X, A)$ e un aperto $U \subseteq X$ tale che $\overline{U} \subseteq \operatorname{int} A$, l'inclusione $(X \setminus U, A \setminus U) \to (X, A)$ induce un isomorfismo $H_n(X \setminus U, A \setminus U) \cong H_n(X, A)$ per ogni $n \geq 0$.

e l'invarianza per retrazione (si ricordi che un sottospazio $Y \subset X$ è una retrazione di $X$ se esiste una mappa continua, inversa sinistra all'inclusione canonica, $r\colon X \to Y$ tale che $r|_Y = \mathrm{id}_Y$), nel senso che se $X' \subset X$, $Y' \subset Y$ sono retrazioni dei due spazi, $H(Y, X) \cong H(Y', X')$.

La teoria di Lusternik e Schnirelmann farà un pesante uso della coomologia di de Rham relativa.

### 1.4.4 Teoria di Lusternik–Schnirelmann.

Sia come al solito $M$ una varietà liscia, ed $f \in C^2(M)$. Consideriamo questa condizione sulla coppia $(M, f)$:

**Definizione 1.13 :** La coppia $(M, f)$ è *Palais-Smale* se ogni successione $(x_n) \subset M$ tale che

$$(i)\ \|f'(x_n)\| \to 0 \qquad (ii)\ |f(x_n)| < K$$

ammette una sottosuccessione convergente.

Si noti che ovviamente se $M$ è compatta $(M, f)$ è Palais-Smale per ogni $f \in C^2(M)$.

Ora, se $(M, f)$ è PS, $M$ non compatta (per esempio $M = \mathbf{R}^n$), si ha la seguente

**Proposizione 1.9.** Se $(X, f)$ è PS per ogni scelta di $a < b$, l'insieme $L = \mathrm{Crt}(f) \cap f^{\leftarrow}[a, b]$ dei punti critici di $f$ in $f^{\leftarrow}[a, b]$ è compatto.

*Dimostrazione.* Si mostra che è chiuso e limitato. □

Si ricordi ora che $M$ si può dotare di una struttura riemanniana $g$ (Teorema di Whitney), che definisce una coppia di isomorfismi, uno inverso dell'altro,

$$^\sharp\colon T^*M \to TM\colon \zeta_i \mapsto \sum g^{ij}\zeta_j$$
$$^\flat\colon TM \to T^*M\colon v_i \mapsto \sum g_{ij}v_j$$

($g^{-,-}$ indica l'inversa di $g$ nelle coordinate di $T_xM$).

Definiamo allora il *gradiente* di una funzione liscia $f$ come l'unico campo vettoriale $\nabla f := (\mathrm{d}f)^\sharp$, $(\nabla f)_i = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}$. Definiamo infine l'*insieme di sublivello* di $f \in C^2(M, \mathbf{R})$ come

$$M^a = \big\{x \in M \mid f(x) \leq a\big\}$$

È chiaro che il bordo dell'insieme di sublivello $M^a$ contiene $f^a = f^{\leftarrow}\{a\}$.

**Teorema 1.8 :** Siano $a < b$ due reali. Se $f \in C^2(M, \mathbf{R})$ non ha punti critici in $M^b \setminus M^a$, allora $M^b \cong M^a$ (equivalentemente: $H^\bullet(M^b, M^a) = (0)$).

*Dimostrazione.* Mostriamo che tra i due esiste un diffeomorfismo, e la tesi seue dalla proprietà di funtorialità di $H^\bullet(-)$.

Definiamo il campo vettoriale $\underline{Y}$ su $M$ scegliendo due intorni aperti $A_1 \subset A_2$ di $M^b \setminus M^a$ in $M$ tali che in $\mathrm{cl}(A_2)$ $\nabla f$ è un c.v. mai nullo. Allora definiamo

$$\underline{Y}(x) = \begin{cases} -\frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|_g^2} & x \in \mathrm{cl}A_1 \\ \underline{Y}_0(x) & x \in A_2 \setminus A_1 \\ \underline{0} & x \in M \setminus A_2 \end{cases}$$

in cui $|\nabla f(x)|_g^2 = \sqrt{g_x(\nabla f(x), \nabla f(x))}$ e $\underline{Y}_0$ è un campo vettoriale che "$C^1$-connette" il versore gradiente a zero. (È un uso del Lemma di Urysohn, che afferma che dati due chiusi disgiunti $\mathrm{cl}(A_1)$ e $M \setminus A_2$ si può definire una funzione $\eta \in C^\infty(M)$ che assume valore 1 nel primo insieme ed è nulla nel secondo.)

Il flusso del campo così costruito definisce il diffeomorfismo che cerchiamo; in effetti per ogni $x \in A_1$

$$\frac{d}{dt}f(\Phi_Y^t(x)) = \mathrm{d}f\big(\underline{Y}(\Phi_Y^t(x))\big) = \mathrm{d}f_{\Phi_Y^t}\Big(-\frac{\nabla f}{|\nabla f|^2}\Big|_{\Phi_Y^t}\Big) = -\frac{1}{|\nabla f|^2}\mathrm{d}f(\nabla f) = -1$$

in modo che $f(\Phi_Y^t(x)) = f(x) - t$, e dunque $f(\Phi_Y^{b-a}(x)) - a = f(x) - b$, di modo che $\Phi_Y^{b-a}$ è il diffeomorfismo cercato: se $x \in M$ è tale che $f(x) - b \leq 0$, allora $y = \Phi_Y^{b-a}(x)$ è tale che $f(y) - a \leq 0$. □

**Corollario.** Supponiamo che, per caso o fortuna, $H^\bullet(M^b, M^a) \neq (0)$; allora quanto appena mostrato prova che in $M^b \setminus M^a$ esiste almeno un punto critico di $f$.

**Definizione 1.14 :** Per ogni $\alpha \in H^\bullet(M^b, M^a) \setminus 0$ definiamo

$$c(\alpha, f) := \inf\{\lambda \in [a, b] \mid i_\lambda^*\alpha \neq 0\}$$

$i_\lambda$ essendo l'inclusione $M^\lambda \hookrightarrow M^b$, per ogni $\lambda \in [a, b]$, ed $i_\lambda^*$ la mappa $H^\bullet(M^b, M^a) \to H^\bullet(M^\lambda, M^a)$ indotta in coomologia.

Questa definizione è ben data perché $i_a^*\alpha = 0$ e per ipotesi $i_b^*\alpha \neq 0$. L'utilità fondamentale di questo valore è spiegata dal seguente

**Teorema 1.9 :** Il valore $c(\alpha, f)$ è critico per $f$.

*Dimostrazione.* Abbiamo già osservato che se $(M, f)$ è Palais-Smale, $\mathrm{Crt}(f) \cap f^{\leftarrow}[a, b]$ è compatto.

Se per assurdo $c(\alpha, f)$ non è critico per $f$ ma regolare, essendo $f^{\leftarrow}[a, b]$ chiuso, esiste un intervallo del tipo $[c - \epsilon, c + \epsilon]$ che non contiene punti critici di $f$.Perciò per questo motivo $H^{\bullet}(M^{c+\epsilon}, M^{c-\epsilon}) = (0)$. Dunque nella sequenza esatta

$$\begin{tikzcd} 0 = H^{\bullet}(M^{c+\epsilon}, M^{c-\epsilon}) \arrow[r] & H^{\bullet}(M^{c+\epsilon}, M^{a}) \arrow[r, "i^*"] & H^{\bullet}(M^{c-\epsilon}, M^{a}) \\ & H^{\bullet}(M^{b}, M^{a}) \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

la freccia $i^*$ è iniettiva, e per definizione di $c$, $\alpha \neq 0$ in $H^{\bullet}(M^{c+\epsilon}, M^{a})$, dunque $i^*(\alpha) \neq 0$: ciò contraddice la definizione di $c$. $\square$

**Teorema 1.10** [DEFORMAZIONE]**:** Sia $(X, f)$ una coppia PS, $Y$ il campo $-\nabla f$ e $K_c = \mathrm{Crt}(f) \cap M^c = \mathrm{Crt}(f) \cap \{x \in M \mid f(x) = c\}$. Allora, per ogni $U \subseteq M$ intorno aperto di $K_c$ esiste $\epsilon_0$ tale che, per ogni $0 < \epsilon < \epsilon + 0$ esiste $t > 0$ tale che

$$\Phi_Y^t(M^{c+\epsilon}) \subseteq M^{c-\epsilon} \cup U.$$

*Dimostrazione.* Omessa. $\square$

**Teorema 1.11 :** Sia $(X, f)$ una coppia PS, $\alpha \neq 0$ in $H^{\bullet}(M^b, M^a)$ e $\beta \in H^k(M^b)$ con $k \geq 1$. Allora

- $c(\alpha \wedge \beta, f) \geq c(\alpha, f)$;
- Se la disuguaglianza di prima è un uguaglianza, sia come prima $K_c = \mathrm{Crt}(f) \cap M^c$. Allora per ogni intorno $U$ di $K_c$, $\beta$ è diverso da zero in $H^{\bullet}(U)$, e nella superficie di livello in cui c'è il valore critico ce ne sono infiniti.

*Dimostrazione.* Per il primo punto, se $\lambda \in [a, b]$ è tale che $i_\lambda^* \alpha = 0$, allora a maggior ragione $i_\lambda^*(\alpha \wedge \beta) = 0$, dunque, essendo $\{\lambda \mid i_\lambda^* \alpha \neq 0\} \supseteq \{\lambda \mid i_\lambda^*(\alpha \wedge \beta) \neq 0\}$, l'inf del primo è minore o uguale all'inf del secondo insieme, come volevasi.

Per il secondo punto, supponiamo che $c(\alpha, f) = c(\alpha \wedge \beta, f)$. Supponiamo per assurdo che esista un intorno $U$ di $K_c$ tale che $\beta = 0$ in $H^{\bullet}(U)$. Allora per il Teorema di Deformazione $H^{\bullet}(M^{c+\epsilon}, U \cup M^{c-\epsilon}) = (0)$. Questo però è assurdo: $\alpha \wedge \beta$ è zero su $U \cup M^{c-\epsilon}$ perché $\beta$ è nulla sul primo insieme e $\alpha$ sul secondo, ma $\alpha \wedge \beta$ non sparisce su $M^{c+\epsilon}$ (verrebbe violata la proprietà dell'inf).

Da ultimo, siccome $\beta \in H^k(U)$ con $k \geq 1$, se $K_c$ fosse un insieme finito, potremmo scegliere come $U$ una unione finita di palle (quindi tutte semplicemente connesse), per le quali $H^k(U) \neq 0$ con $k \neq 0$, assurdo. $\square$

### 1.4.5 GFQI e soluzioni minmax ad HJ.

Sia $M$ una varietà compatta, e $\Lambda \subset T^*M$ una sottovarietà. Se $\Lambda$ è generata da una forma differenziale $\alpha$, nel senso che

$$\Lambda = \{(x, \alpha(x)) \mid x \in M\}$$

e tale forma è chiusa, allora $\Lambda$ è lagrangiana. Se tale $\alpha$ per di più è anche esatta, $\Lambda$ si dice anch'essa esatta.

Se $\Lambda$ è una sottovarietà lagrangiana esatta di $T^*M$ essa è il grafico di $\mathrm{d}f$ per qualche $f \in C^\infty(M)$. L'insieme dei punti critici di $f$ coincide con l'intersezione

$$\Lambda_f \cap O_M$$

di $\lambda = \Lambda_f$ con la zero-sezione $O_M = \{(x, 0) \mid x \in M\}$. In generale, sottovarietà lagrangiane non sono globalmente esatte, ma almeno localmente esse si ottengono per mezzo di funzioni *generatrici* della forma

$$f\colon M \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}\colon (x, \xi) \mapsto f(x, \xi)$$

definendo $\Lambda_f = \left\{\left(x, \frac{\partial f}{\partial x}\right) \mid \frac{\partial f}{\partial \xi} = 0\right\}$, lo zero essendo un valore regolare della mappa $(x, \xi) \mapsto \frac{\partial f}{\partial \xi}(x, \xi)$ (con ciò si assicura che il luogo geometrico di tali punti è una sottovarietà).

**Definizione 1.15** [GFQI]**:** Una *funzione generatrice quadratica all'infinito* è una mappa $f\colon M \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ tale che per $|\xi| \geq C > 0$, $f(x, \xi)$ non dipende da $x$ ed è una forma quadratica non degenere nelle $\xi$:

$$f(x, \xi) = \xi^t A \xi, \quad A \in \mathrm{GL}_k(\mathbf{R})$$

Vi sono delle operazioni sulle funzioni generatrici di sottovarietà lagrangiane che le lasciano invariate:

- Banalmente, se $f$ genera la sottovarietà $\Lambda$, allora $f(-) + c$, con $c$ costante, genera lo stesso luogo geometrico.
- Se $f\colon M \times \mathbf{R}^k \to R$ è una GFQI e $\varphi\colon X \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^k$ una mappa tale che $\varphi(x, -)$ è diffeomorfismo per ogni $x \in M$, allora $f_1(x, \xi) = f(x, \varphi(x, \xi))$ genera lo stesso luogo geometrico.
- Se $f\colon M \times \mathbf{R}^k \to R$ è una GFQI e $Q \in \mathrm{GL}_r(\mathbf{R})$, $f_1(x, \xi, \eta) = f(x, \xi) + \eta^t Q \eta$ genera lo stesso luogo geometrico.

Ci possiamo ora fare delle domande: quand'è che una sottovarietà lagrangiana $\Lambda$ ammette una GFQI? E in caso la ammetta, quando si può dire se tale funzione generatrice è unica a meno delle operazioni su enunciate? La risposta, caro amico, è perduta nel vento e in alcuni risultati di Viterbo.

**Osservazione.** Supponiamo per semplicità $M = \mathbf{R}^k$. Se $f\colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ è una GFQI di una sottovarietà lagrangiana $\Lambda$, che è una soluzione geomtrica di un problema di Hamilton-Jacobi

$$H\left(x, \frac{\partial f}{\partial x}\right) = e, \qquad \frac{\partial f}{\partial \xi} = 0.$$

In particolare sarà importante scegliere per ogni $x \in \mathbf{R}^n$ un punto critico $\bar{\xi} = \bar{\xi}(x)$ per costruire una soluzione $S(x) = f(x, \bar{\xi}(x))$.

Al fine di studiare questo problema, dimostriamo che

**Teorema 1.12 :** Una mappa $f\colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}\colon (x, \xi) \mapsto f(x, \xi)$ che sia una GFQI è Palais-Smale su $\mathbf{R}^k$, per ogni $x$-sezione $f(x, -)$.

*Dimostrazione.* Prendiamo una successione $(\xi_j) \subset \mathbf{R}^k$ tale che $|f(x, \xi_j)| < C$ e $\lim_j \frac{\partial f}{\partial \xi}(x, \xi_j) = 0$. Se $(\xi_j)$ cade definitivamente in un compatto $K \Subset \mathbf{R}^k$, la tesi segue dal fatto che esiste una sottosuccessone () convergente ad un valore che è certamente un punto critico.

Non può accadere qualcosa di diverso, perché se $(\xi_j)$ esce da qualsiasi compatto, si trova definitivamente fuori dalla palla $B(0, R]$, dove $f(x, \xi) = \xi^t A \xi$. Ma allora $\frac{\partial f}{\partial \xi}(x, \xi_j) = 2A\xi_j \to \infty$ se $j \to \infty$, il che è assurdo. $\square$

**Osservazione.** Se $f(x,-)$ è un GFQI, $K > 0$ è tale che per $|u| > K$ $f(x,u) = u^t A u$. Se poi $R$ è il raggio spettrale di $A$, possiamo sempre scegliere $c > 0$ tale che

$$\begin{cases} -c < \min\limits_{u \in B(0,k]} f(x,u) \\ \max\limits_{u \in B(0,k]} f(x,u) < c \\ RK^2 < c \end{cases}$$

(se $L = \max f(x,u)$, $l = \min f(x,u)$, basta scegliere $c = \max\{L, -l, RK^2\} + 1$). Allora, notando che $f^\lambda = A^\lambda$ per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$, c'è l'isomorfismo

$$H^\bullet(f^c, f^{-c}) \cong H^\bullet(A^c, A^{-c}).$$

Tornando ad una funzione generatrice $f$ di una $\Lambda$ soluzione geometrica ad un problema di HJ, quadratica all'infinito, dovremmo ora disporre di un criterio che ci permetta di scegliere "bene" un punto critico per la mappa $f(x,-)$, scritto $\xi^*(x)$. Questo dà una funzione $S\colon x \mapsto \xi^*(x)$ che fa da soluzione classica ad HJ.

Dobbiamo determinare un elemento non nullo $\alpha$ nella coomologia relativa $H^\bullet(f^c, f^{-c})$, e con questo un punto fisso $c(\alpha, f)$. È noto (?) dalla geometria algebrica che se una forma quadratica reale $A$ è congruente a $\begin{pmatrix} \mathbb{I}_{k_+} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -\mathbb{I}_{k_-} \end{pmatrix}$

$$H^k(A^c, A^{-c}) = \begin{cases} \mathbf{R} & \text{se } k = k_- \\ (0) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Intendendo con $A^\lambda$ l'insieme di sottolivello della quadrica definita da $A$.

Possiamo allora scegliere in $H^{k_-}(A^c, A^{-c})$ l'immagine di 1 nell'isomorfismo $\mathbf{R} \cong H^{k_-}(A^c, A^{-c})$. Ripetendo questo procedimento per ogni $x \in \mathbf{R}^n$, la soluzione costruita è detta soluzione minmax, o *soluzione variazionale* al problema di Hamilton-Jacobi. Un risultato di Viterbo assicura che tale soluzione è sempre almeno Lipschitz-continua.

### Dualità di Poincarè, isomorfismo di Thom.

Il topologia, geometria algebrica e algebra omologica con il termine *dualità di Poincaré* si intende l'insieme di proposizione sull'isomorfismo delle omologie e delle coomologie in dimensioni complementari. Un teorema elementare, di Poincaré, afferma che se $M$ è una varietà orientata di dimensione $n$, e si indica con $H_c^{n-k}(M)$ la $(n-k)$-esima coomologia (di de Rham) delle forme a supporto compatto, la mappa bilineare

$$H^k(M) \times H_c^{n-k}(M) \to \mathbf{R}$$
$$(\theta, \omega) \mapsto \int_M \theta \wedge \omega$$

è coomologica e non degenere (per mostrare la prima asserzione, che $(\theta + \mathrm{d}\alpha, \omega)$ ha la stessa immagine di $(\theta, \omega)$, si scelga un compatto $K \Supset \operatorname{supp}(\theta \wedge \alpha)$ per avere che $\int_M \mathrm{d}(\theta \wedge \alpha) = \int_K \mathrm{d}(\theta \wedge \alpha) = \int_{\partial K} \theta \wedge \alpha = 0$, perché $\theta \wedge \alpha|_{\partial K} \equiv 0$).

Sulla base di questo essa definisce un isomorfismo $H^k(M) \cong (H_c^{n-k}(M))^*$, che manda $\theta$ in $\left(\int_M \theta \wedge -\right) \in (H_c^{n-k}(M))^*$ (se $\omega$ ha supporto compatto, lo ha anche $\theta \wedge \omega$). L'isomorfismo non è reversibile, ossia non sempre $H^k(M)^* \cong H_c^{n-k}(M)$ (ragioni di dimensione).

Con ciò in mente, si consideri una sottovarietà $\Sigma$ di dimensione $n-k$ immersa in $M$ mediante una mappa $\pi\colon \Sigma \hookrightarrow M$. La mappa lineare

$$f_\Sigma\colon H_c^{n-k}(M) \ni \omega \mapsto \int_\Sigma \pi^*\omega \in \mathbf{R}$$

è coomologica (se $\Sigma$ è senza bordo), e $f_\Sigma$ sta in $(H_c^{n-k}(M))^*$. Per messo della dualità di Poincaré su determinata, riusciamo a trovare un'unica $k$-forma $\mu$ tale che

$$\int_\Sigma \pi^*\omega = \int_M \mu \wedge \omega.$$

La classe di una tale $\mu$ è detta *duale di Poincaré di* $\Sigma$. È possibile mostrare che si può scegliere un rappresentante per la classe di coomologia di $\mu$ con supporto in un intorno arbitrariamente piccolo di $\Sigma$ (si veda a tal proposito Bott-Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, e si tenti di capire cosa ciò significa).

Se scegliamo come $\Sigma$ la zero-sezione di un fibrato vettoriale $p\colon M \to B$ di base $B$ e fibre $\mathbf{R}^k$, e denotiamo con $t \in H^k(M)$ il duale di Poincarè di tale $\Sigma$, resta indotto l'isomorfismo

$$H^{\bullet-k}(B) \cong H_c^\bullet(M)$$

(*isomorfismo di Thom*) definito mandando $\alpha$ in $t \wedge p^*\alpha$.

### 1.4.6 Punti fissi di Simplettomorfismi e critici di GFQI.

Data una funzione liscia $f\colon X\times X \to \mathbf{R}$, essa genera un simplettomorfismo $\varphi\colon T^*X \to T^*X\colon (x, \mathrm{d}f_x) \mapsto (y, \mathrm{d}f_y)$. I punti fissi di $\varphi$ sono in corrispondenza ai pnti critici della mappa $\psi\colon X \to \mathbf{R}\colon x \mapsto f(x,x)$.

Infatti se $x_0 \in X$, $\mathrm{d}\psi_{x_0} = (\mathrm{d}f_x + \mathrm{d}f_y)_{(x,y)=(x_0,x_0)}$. Sia ora $\xi = \mathrm{d}f_x|_{(x,y)=(x_0,x_0)}$; si osservi che

$$x_0 \text{ è critico per } \psi \iff \mathrm{d}\psi_{x_0} = 0, \iff \mathrm{d}f_y|(x,y) = (x_0,x_0) = -\xi.$$

Dunque il punto di $\Gamma^\sigma$ corrispondente a $(x,y) = (x_0,x_0)$ è $(x_0,x_0,\xi,\xi)$. Ma $\Gamma^\sigma$ è il grafico di $\varphi$, dunque $\varphi(x_0,\xi) = (x_0,\xi)$.

Siamo quindi ricondotti a studiare un problema di punto fisso cercando punti critici. Le differenze (da un punto di vista topologico) tra diverse superfici di livello della funzione $\bar{f}(x,\xi) = f(x,x,\xi)$ indicheranno numero e tipo dei punti critici cercati.

Se $f(x,-)$ è una GFQI, in opportune carte si può scrivere $f(x,\xi) = \xi^t A\xi$ in forma canonica, ossia $A = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{k_+} & \\ & -\mathbb{I}_{k_-} \end{pmatrix}$, di modo che $f(x,\xi) = |\xi_+|^2 - |\xi_-|^2$. per $\xi_\pm \in \mathbf{R}^{k_\pm}$. Si osservi che l'indipendenza di $f$ dalle $x$ per valori abbastanza grandi di $\xi$ permette di dire che $f^c = M \times A^c = M \times \{\xi \mid \xi^t A\xi \le c\} =: E^c$. Potendo scegliere $c > 0$ grande a piacere oltre il valore per cui $f(x,-)$ diventa una forma quadratica, scriviamo $E^{\pm\infty}$ per indicare $E^{\pm c}$.

**Teorema 1.13 :** $H^\bullet(M) \cong H^{\bullet+k_-}(E^\infty, E^{-\infty})$.

*Dimostrazione.* Si osservi che $E^{\pm\tilde{c}}$ si retrae a $E^{\pm c}$ per ogni $\tilde{c} \ge c$. Se poi definiamo $U = \operatorname{int}(A^{-(c+\epsilon)})$, si ha

$$H^\bullet(A^c, A^{-c}) \overset{(1)}{\cong} H^\bullet(A^c \setminus U, A^{-c} \setminus U) \overset{(2)}{\cong} H^\bullet(D^{k_-}, \partial D^{k_-})$$

dove (1) vale per escissione e (2) per retrazione.

Da ciò segue che

$$H^\bullet(E^\infty, E^{-\infty}) \cong H^\bullet(M \times A^\infty, M \times A^{-\infty}) \cong H^\bullet(M \times D^{k_-}, M \times \partial D^{k_-})$$

Ricordando, ora, l'isomorfismo di Thom applicato al fibrato vettoriale $M \times \mathbf{R}^{k_-} \to M$, $H^\bullet(M) \cong H_c^{\bullet+k_-}(M \times \mathbf{R}^{k_-})$. ora, però,

$$\begin{aligned} H_c^{\bullet+k_-}(M \times \mathbf{R}^{k_-}) &\cong H^{\bullet+k_-}(M \times \mathrm{int}D^{k_-}) = H^{\bullet+k_-}(M \times (D^{k_-} \setminus \partial D^{k_-})) = \\ &= H^{\bullet+k_-}(M \times (D^{k_-} \setminus \partial D^{k_-}), \varnothing) \cong H^{\bullet+k_-}(M \times D^{k_-}, M \times \partial D^{k_-}) \end{aligned}$$

dunque $H_c^{\bullet+k_-}(M \times \mathbf{R}^{k_-}) \cong H^{\bullet+k_-}(M \times D^{k_-}, M \times \partial D^{k_-})$.

Unendo tutto ciò si ottiene la tesi:

$$H^\bullet(M) \overset{\text{Thom}}{\cong} H_c^{\bullet+k_-}(M \times \mathbf{R}^{k_-}) \cong H^{\bullet+k_-}(M \times D^{k_-}, M \times \partial D^{k_-}) \cong H^{\bullet+k_-}(E^\infty, E^{-\infty}).$$

□

### 1.4.7 Teorema di Liouville–Arnold e Perturbazioni.

Una funzione liscia $f \in C^\infty(M)$ è detta un *integrale* di un campo vettoriale $X$ se essa è "costante lungo le curve integrali di $X$", ossia se la derivata di Lie $\mathcal{L}_X f$ è nulla. Si ricordi che $\mathcal{L}_X f = \iota_x \mathrm{d}f = \sum \frac{\partial f}{\partial q_i} X_i(q) = \nabla f(q) \cdot X(q)$.

**Proposizione 1.10.** Sia $X_H = \nabla^\top H$ un campo vettoriale hamiltoniano di hamiltoniana $H$ sulla varietà $M$, ed $f \in C^\infty(M)$ tale che $\{f, H\} = 0$. Allora $f$ è un integrale del campo $X$.

*Dimostrazione.*

$$\mathcal{L}_X f = \iota_{X_H} \mathrm{d}f = \omega(X_H, \nabla^\top f) = \omega(\nabla^\top H, \nabla^\top f) = \{H, f\}. \qquad \square$$

In particolare si noti che l'hamiltoniana $H$ è sempre un integrale del campo vettoriale hamiltoniano ad essa associato, dunque un campo vettoriale hamiltoniano ha sempre almeno un integrale, la sua hamiltoniana.

Abbiamo così ottenuto un importante criterio di hamiltonianità di un campo:

> Una curva integrale di un campo $X$ su $M$ non può essere densa in $M$, perché è forzata (dal fatto che $H$ è "costante lungo i moti" di $X$) a restare sull'ipersuperficie $H^{\leftarrow}(0) \subset T^*M$. Perciò se $X$ ha una curva integrale densa (per esempio se tale curva è l'immagine di una retta a pendenza irrazionale nel piano, attraverso la mappa $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$) non può essere hamiltoniano.

**Proposizione 1.11.** Se $f, g$ sono integrali del campo vettoriale $X_H$, lo è $\{f, g\}$.

*Dimostrazione.*

$$\{H, \{f, g\}\} = -\{g, \{H, f\}\} - \{f, \{g, H\}\} = 0. \qquad \square$$

Possiamo dunque sperare di costruire nuovi integrali a partire da alcuni noti; c'è però un problema. Può infatti succedere che considerare le parentesi di Poisson di integrali del moto generi ad un certo punto funzioni dipendenti da quelle già trovate.

Siamo allora portati a riformulare il problema come

Come trovare il numero più alto possibile di integrali di un campo vettoriale hamiltoniano?

Le curve integrali di $X_H$ sono le soluzioni del sistema di ODE associato ad $X_H$:

$$\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \qquad = X(q) = (X_1(q), \dots X_n(q)).$$

Appare chiaro che nel caso $X_H$ abbia un integrale del moto $f$, l'ordine del sistema soprascritto può essere diminuito di 1 considerando la restrizione di $X_H$ alla sottovarietà $\{f = c\} \subset M$.

Supponiamo che esistano *due* integrali funzionalmente indipendenti $f$ e $g$ (questo significa che i gradienti $\nabla f$, $\nabla g$ sono vettori indipendenti in ogni punto di un aperto $U$ denso in $M$: ci sono problemi con funzioni lisce non analitiche che possono non esserlo ovunque, ma non ce ne occuperemo). Allora le partizioni $\{f = c\}_{c\in\mathbf{R}}$ e $\{g = c\}_{c\in\mathbf{R}}$ determinano due foliazioni distinte di $M$; fissato un $\bar{c}$ comune alle due, il luogo intersezione delle due è una varietà grazie all'ipotesi di indipendenza, che assicura che $\{f = \bar{c}\}$ e $\{g = \bar{c}\}$ si intersecano trasversalmente.

Si può allora pensare di restringere $X_H$ ad una famiglia di ipersuperfici $N_c$ invarianti sotto l'azione del suo flusso, decrementando di due l'ordine della ODE da integrare per risolvere i moti del sistema.

Supponiamo di operare su una varietà simplettica $(M^{2n}, \omega)$ e di trovarci nella miglior situazione sospettabile, con $2n-1$ integrali del moto tra loro indipendenti. In tal caso la superficie di livello $\Sigma = \bigcap_{i=1}^{2n-1} f_i^{\leftarrow}(0)$ è una varietà di dimensione 1, corrispondente esattamente alle traiettorie del sistema di partenza. Dunque, i due problemi

Integrare i( moti de)l sistema

e

Trovare $2n-1$ integrali del moto indipendenti

sono equivalenti.

Questa situazione però si verifica così di rado (=mai) nei sistemi reali, da farci accontentare, di solito, in qualcosa di meno, individuando un numero minore di integrali e risalire comunque alle equazioni del moto.

In tale solco si inserisce il teorema di Liouville–Arnol'd.

**Definizione 1.16 :** Sia $(M, \omega)$ una varietà simplettica di dimensione $2n$. Un insieme $F = \{f_1, \dots, f_k\}$ di funzioni $C^\infty$ è detto un *sistema involutivo* se $\{f_i, f_j\} = 0$ per ogni $i, j = 1, \dots, k$. Un sistema involutivo si dice*completo* se è fatto da $n = \frac{1}{2} \dim M$ elementi.

**Teorema 1.14 :** Sia $F$ un sistema involutivo completo sulla varietà simplettica $(M, \omega)$. Sia poi $T^n$ la superficie di livello non singolare comune ad $f_1, \dots, f_n$, ossia $T^n = \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{\leftarrow}(0)$. Allora $T^n$ è una varietà liscia di dimensione $n$, invariante sotto l'azione del flusso hamiltoniano $X_k = \nabla^\top f_k$ per ogni $f_k \in F$; se in più $T^n$ è compatta e connessa, è anche diffeomorfa al toro $\mathbb{T}^n$ di dimensione $n$, su un aperto del quale possiamo introdurre le coordinate angolari $\underline{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Ogni campo vettoriale $X_k$ definito come sopra determina (mediante le sue curve integrali) un moto periodico sul toro. Su $M$ esistono allora coordinate $(\underline{\varphi}, \underline{I}) = (\varphi_1, \dots, \varphi_n, I_1, \dots I_n)$ tali che le equazioni di Hamilton si scrivono

$$\begin{cases} \dot{\underline{I}} = 0 \\ \dot{\underline{\varphi}} = k(I) \end{cases}$$

In altre parole resta definita una trasformazione canonica

$$T^*\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{2n} \supset U \longrightarrow V \times \mathbb{T}^n \cong T^*\mathbb{T}^n$$

che manda l'hamiltoniana $H$ nell'hamiltoniana $h\colon T^*\mathbb{T}^n \to \mathbf{R}\colon (\varphi, I) \mapsto h(I)$ (indipendente dalle $\underline{\varphi}$), e dunque tale che in quelle coordinate le equazioni di Hamilton sono facilmente integrabili;

$$\begin{cases} I(t) = I(0) = I_0 \\ \varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\partial h(I_0)}{\partial I} t = \varphi_0 + \omega(I)t \end{cases}$$

Tale situazione paradisiaca si verifica però talmente di rado (=mai) in pratica, che si preferisce studiare problemi "perturbati" vicino alla condizione di integrabilità. Una tale trasformazione si presenta nella forma

$$H(q,p) = h(I) + \epsilon f(I, \varphi, \epsilon)$$

dove $(I, \varphi)$ sono le variabili di azione ed angolo del sistema, e $0 < \epsilon \ll 1$.

Occupiamoci ora del problema di trovare una trasformazione canonica $g\colon T^*M \to \mathbf{R}$ che cambi le coordinate in modo da "deperturbare" l'equazione precedente. Se esiste una $g$ tale che $(h+\epsilon f)(x_\epsilon(y)) = h(y)$ ($y$ è una variabile generica), e quando si sia notato che $\frac{\partial x_\epsilon(y)}{\partial \epsilon} = \mathbb{E}\nabla g(x_\epsilon(y))$, per $\epsilon \approx 0$ si ha

$$(h+\epsilon f)(x_\epsilon(y)) = h(y) + \epsilon\Big(\nabla h(y) \cdot \frac{\partial x}{\partial \epsilon}\Big|_{\epsilon=0} + f(y)\Big) + O(\epsilon^2)$$

dunque annullando il termine $\nabla h(y) \frac{\partial x}{\partial \epsilon}\Big|_{\epsilon=0} + f(y)$, $h + \epsilon f \approx h$ a meno di $\epsilon^2$. Ma per quanto detto sopra, $\nabla h(y) \frac{\partial x}{\partial \epsilon}\Big|_{\epsilon=0} + f(y) = 0$ se e solo se $\nabla h \cdot \mathbb{E}\nabla g + f(y) = 0$ e

$$\nabla h \cdot \mathbb{E}\nabla g + f(y) = 0 \iff \{h, g\}(y) + f(y) = 0.$$

Consideriamo ora le coordinate di azione angolo $(\underline{I}, \underline{\varphi}) = (I_1, \dots, I_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$: la condizione $\{h, g\} + f - 0$ si riscrive

$$-\frac{\partial g}{\partial \underline{\varphi}} \cdot \frac{\partial h}{\partial \underline{I}} + f(\underline{I}, \underline{\varphi}) = 0 \iff f(\underline{I}, \underline{\varphi}) = \frac{\partial g}{\partial \underline{\varphi}} \cdot \frac{\partial h}{\partial \underline{I}}$$

Ricordando un risultato di Analisi di Fourier per cui $f \in C^\infty$ si riesce a scrivere come

$$f(\underline{I}, \underline{\varphi}) = \sum_{\underline{k} \in \mathbf{Z}^n} f_{\underline{k}}(I) \exp(i\underline{k} \cdot \underline{\varphi})$$

ed esistono $c, \sigma > 0$ tali che $|f_{\underline{k}}(\underline{I})| \le c \exp(-\sigma|\underline{k}|)$ possiamo sviluppare

$$\begin{aligned} g(\underline{I}, \underline{\varphi}) &= \sum_{\underline{k} \in \mathbf{Z}^n} g_{\underline{k}}(\underline{I}) \exp(i\underline{k} \cdot \underline{\varphi}). \\ f(\underline{I}, \underline{\varphi}) &= \sum \frac{\partial h}{\partial \underline{I}}(I) \cdot \sum i\underline{k}_l g_{\underline{k}}(\underline{I}) \exp(i\underline{k} \cdot \underline{\varphi}) \\ &= i\big(\nabla_{\underline{I}} h(\underline{I}) \cdot \underline{k}\big) g_{\underline{k}}(\underline{I}) = f_{\underline{k}}(\underline{I}). \\ g_{\underline{k}}(\underline{I}) &= \frac{-i f_{\underline{k}}(\underline{I})}{\nabla_{\underline{I}} h(\underline{I}) \cdot \underline{k}} \end{aligned}$$

All'ipotesi che $\nabla_{\underline{I}} h(\underline{I}) \cdot \underline{k} =: \underline{\Omega}(\underline{I}) \cdot \underline{k} \neq 0$ per ogni $\underline{k} \in \mathbf{Z}^n$ (questa condizione di indipendenza lineare su $\mathbf{Z}$ è detta *assenza di risonanza*), disponiamo quindi di una espressione in serie di Fourier per la trasformazione $g$ cercata:

$$g_{\underline{k}}(\underline{I}) = \sum_{\underline{k} \in \mathbf{Z}^n} \frac{f_{\underline{k}}(\underline{I})}{i\underline{k} \cdot \underline{\Omega}(\underline{I})}$$

Resta inteso che la scrittura perde di senso quando $\underline{k}$ è ortogonale al vettore delle frequenze $\underline{\Omega}$: per motivi analitici vorremmo non solamente che $\underline{\Omega}(\underline{I}) \cdot \underline{k} \neq 0$, ma anche che questa quantità si mantenga "abbastanza lontana" dallo zero, per esempio chiedendo che

$$\forall \underline{k} \neq \underline{0} \in \mathbf{Z}^n \qquad |\underline{\Omega}(\underline{I}) \cdot \underline{k}| \geq \frac{\alpha}{|\underline{k}|^\beta}$$

Casi come questi si dicono $(\alpha, \beta)$-*diofantei.*

Un risultato che in questo senso assicura un buon comportamento dei dati non diofantei all'interno di quelli diofantei è dovuto a Siegel:

**Teorema 1.15 :** Sia $B_L$ la palla di raggio $L > 0$ in $\mathbf{R}^n$, $\{\underline{\omega} \in \mathbf{R}^n \mid |\underline{\omega}| \leq L\}$, e $B_{L,(\alpha,\beta)} = \{\underline{\omega} \in B_L \mid \underline{\omega}$ è $(\alpha, \beta)$-diofantea$\}$. Allora, pur se $B_{L,(\alpha,\beta)}$ è denso in $B_L$, vale

$$\mathrm{vol}(B_L \setminus B_{L,(\alpha,\beta)}) \xrightarrow[\beta > n-1]{\alpha \to 0} 0.$$