Fibrazioni tra sfere e Teorema di Hopf

Circolo dei Matematici Giacobini

30 gennaio 2011

Heinz Hopf trova, nel 1931 (**Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche**[1]), un modo di definire una fibrazione $p\colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ tale che ogni fibra $p^{\leftarrow}(x)$ sia omeomorfa a $\mathbb{S}^1$. Implicitamente, la sua costruzione risolve anche un problema geometrico a prima vista non ovvio, mostrando che

> *È possibile partizionare lo spazio tridimensionale $\mathbb{R}^3$ con (una retta e) copie di $\mathbb{S}^1$, a due a due disgiunte e* ***inanellate*****.*

- Le copie di $\mathbb{S}^1$ sono esattamente le fibre $p^{\leftarrow}(x)$;
- Il problema è reso interessante dalla richiesta (*): si pensi al caso di circonferenze concentriche attorno all'asse z.

[1] "Sulle immagini della sfera tridimensionale alla superficie della sfera"

Fibrazioni

Definizione

Siano E, B, F tre spazi topologici, e $p\colon E \twoheadrightarrow B$ una funzione continua e suriettiva, che si dice **fibrazione** *se soddisfa alla seguente condizione di "trivialità locale":*

> *Per ogni $x \in E$ esiste un intorno aperto V contenente $p(x)$ tale che $p^{\leftarrow}(V) \cong V \times F$; F è detta* **fibra** *di p. Lo spazio E si dice* **totale sopra la base** *B.*

Commuta il diagramma di funzioni continue

$$\begin{tikzcd} p^{\leftarrow}(V) \arrow[r, "\sim", no head] \arrow[d, "p|_{p^{\leftarrow}(V)}"'] & V \times F \arrow[dl, "\pi"] \\ V & \end{tikzcd}$$

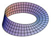
ove $\pi\colon V \times F \to V$ è la proiezione sul primo fattore dal prodotto.

Esempi

- Il prodotto di due spazi $E = B \times F$ è banalmente un fibrato di fibra F e base B.


- Data una varietà differenziabile liscia $\mathcal{M}$ di dimensione n il suo fibrato tangente $T(\mathcal{M})$ è un fibrato di $T(\mathcal{M})$ sopra $\mathcal{M}$, di fibra $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{tikzcd} \coprod_{x\in V} T_x\mathcal{M} \arrow[r, dash] \arrow[d, "p|_{p^{\leftarrow}(V)}"'] & V \times \mathbb{R}^n \arrow[dl, "\pi"] \\ V & \end{tikzcd}$$

- Il nastro di Möbius ha struttura di fibrato con base $]a, b[$ e fibra $]c, d[$ ("localmente un nastro non–torto"), globalmente non prodotto (sarebbe orientabile).


Identifichiamo

$$\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$$
$$\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{C} \times \mathbb{R}$$
$$\mathbb{S}^3 \cong \left\{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\right\}$$
$$\mathbb{S}^2 \cong \left\{(z, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid |z|^2 + x^2 = 1\right\}$$

Definizione

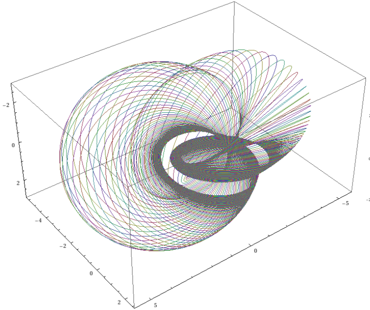
La mappa di Hopf è definita da

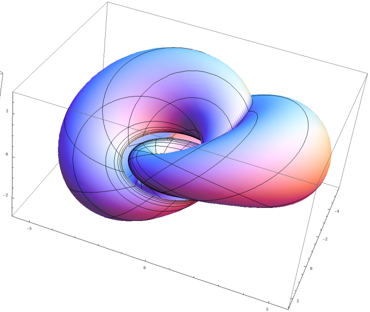
$$p \colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (z_0, z_1) \longmapsto (2z_0\overline{z_1}, |z_0|^2 - |z_1|^2)$$

- $p|_{\mathbb{S}^3} \subset \mathbb{S}^2$ (Esercizio: In effetti la satura suriettivamente).
- $p^{\leftarrow}(x) \cong \mathbb{S}^1$ per ogni $x \in \mathbb{S}^2$. Hint:

$p(z_0, z_1) = p(w_0, w_1) \iff \frac{z_0}{w_0} = \frac{\overline{w_1}}{z_1} = \frac{z_1}{w_1} = \lambda \in \mathbb{C}$, e $|\lambda|^2 = 1\ldots$

Ecco la struttura di fibrato!





$$\{\text{superfici in } \mathbb{S}^3\} \xleftarrow{p^{\leftarrow}} \{\text{curve su } \mathbb{S}^2\}$$

$$\boxed{p\colon\ \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{S}^2}$$

("$|V|$ copie di $\mathbb{S}^1$"). Localmente triviale: globalmente? Esercizio: Aperto massimale V di $\mathbb{S}^2$ tale che $p^{\leftarrow}(V) \cong V \times \mathbb{S}^1$?

Definizione (Quaternioni)

Consideriamo $(\mathbb{R}[\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}],+,\cdot)$ *con gli usuali somma e prodotto, e i tre elementi* $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ *soggetti alle relazioni*

$$\mathcal{R}\colon \begin{cases} \mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=-1 \\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}, \quad \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{i}, \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j} \\ \mathbf{j}\cdot\mathbf{i}=-\mathbf{k}, \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{j}=-\mathbf{i} \quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=-\mathbf{j} \end{cases}$$

L'insieme $\mathbb{H}=\mathbb{R}[\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}]/\mathcal{R}$ *è un corpo (anti)commutativo, ed è l'unica algebra con divisione di dimensione 4 su* $\mathbb{R}$*.*
($(a+\mathbf{i}b+\mathbf{j}c+\mathbf{k}d)\cdot(a'+\mathbf{i}b'+\mathbf{j}c'+\mathbf{k}d')=$ *prodotti formali + riduzioni modulo* $\mathcal{R}$*)*

Esercizio: Verificare che $\mathbb{H}$ si identifica ad un opportuno sottocorpo $\mathbf{H}$ di $M_2(\mathbb{C})$, fatto dalle matrici del tipo $\left(\begin{smallmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z}\end{smallmatrix}\right)$. Hint: $a+\mathbf{i}b+\mathbf{j}c+\mathbf{k}d \leftrightarrow \left(\begin{smallmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib\end{smallmatrix}\right)$. Succede anche per $\mathbb{C}$...

Proprietà Varie

Algebriche:

- Se V_0 è l'insieme dei quaternioni a parte reale nulla, $q \mapsto rq\bar{r}$ è una applicazione $V_0 \to V_0$ per ogni $r \in \mathbb{H}$. Esercizio: In termini di matrici?
- $V_0 = \{Q \in \mathbf{H} \mid \operatorname{tr} Q = 0\}$. Esercizio: Generalizzare a $V_\alpha = \{Q \in \mathbf{H} \mid \operatorname{tr} Q = \alpha\}$ per $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $SU_2 \cong \mathbb{U}_H$ (quaternioni di norma unitaria), mediante $A \in SU_2 \iff A = \left(\begin{smallmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{smallmatrix}\right)$, $z\bar{z} + w\bar{w} = 1$.
- Se $A \in SU_2$, allora $\varphi_A \colon X \mapsto AXA^*$ è una trasformazione ortogonale di $V_0 (\cong \mathbb{R}^3)$. La mappa $\theta \colon SU_2 \to SO(3, \mathbb{R}) \colon A \mapsto \varphi_A$ è un epimorfismo di gruppi.
- $1 \to \{\pm\} \to SU_2 \xrightarrow{\theta} SO_3 \to 1$ è una sequenza esatta di gruppi.

Proprietà Varie

Geometriche:

- $\varphi_A = \varphi_{\alpha A}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}^\times$.
- Se $v, w \in V_0$ il prodotto dei quaternioni ad essi associati è

$$q_v \cdot q_w = -\langle v, w\rangle \mathbf{1}_2 + v \times w$$

- Se $q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ è un quaternione di norma 1, allora φ_{A_q} coincide con la rotazione di $\mathbb{R}^3$ di asse $v = \langle \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix} \rangle$ e angolo $2\gamma = 2 \arccos a$.
- Si ricordi la difficoltà (computazionale) relativa al trovare l'asse e l'angolo di una generica rotazione di $\mathbb{R}^3$!...

$$R(\psi, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \cos\theta\sin\varphi\sin\psi & -\cos\psi\sin\varphi - \cos\theta\cos\varphi\sin\psi & \sin\theta\sin\psi \\ \cos\theta\cos\psi\sin\varphi + \cos\varphi\sin\psi & \cos\theta\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi & -\cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Hopf e Quaternioni

Sia $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^2$, e $r = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^3$ un quaternione di modulo unitario.
Definiamo la mappa $\eta \colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2 \colon r \mapsto \varphi_{A_r}(P_0) = A_r I A_r^*$, ove $I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

- Esercizio: η coincide con la mappa di Hopf. Chiamiamo perciò entrambe le mappe p.
- Esercizio: $p^{\leftarrow}(1, 0, 0) = \{(\cos t, \sin t, 0, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$
- Esercizio: Dati due punti A, B su $\mathbb{S}^2$ determinare l'insieme di tutte le rotazioni dello spazio che spostano A in B. Hint: tutte le rotazioni di quel tipo hanno asse lungo il cerchio massimo che biseca l'arco $\widehat{AB}$.

Esercizio fastidioso: Trovare i quaternioni associati a quelle rotazioni. . .

$\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ vive in uno spazio a 4 dimensioni, e non si può "vedere" nel senso usuale del termine: dobbiamo accontentarci di rappresentazioni locali (pure dense di informazioni).

Definizione (Proiezione Stereografica)

Consideriamo $\mathbb{S}^n \setminus \{N, S\}$, ove $N = e_{n+1}$, $S = -e_{n+1}$ sono i due **poli** *della sfera, e definiamo*

$$\varphi_N : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n \quad \varphi_S : \mathbb{S}^n \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^n$$

$$\varphi_N(P) = (N \vee P) \cap \{x_{n+1} = 0\}, \; \varphi_S(P) = (S \vee P) \cap \{x_{n+1} = 0\}.$$

Più esplicitamente

$$\varphi_N(\underline{x}, x_{n+1}) = \frac{\underline{x}}{1 - x_{n+1}} \overset{\iota_{\mathbb{R}^{n+1}}}{\hookrightarrow} \frac{(\underline{x}, 0)}{1 - x_{n+1}}$$

Con facili conti

$$\varphi_N^{-1}(P') = \left(\frac{2\underline{x}}{1 + \underline{x} \cdot \underline{x}}, \frac{\underline{x} \cdot \underline{x} - 1}{1 + \underline{x} \cdot \underline{x}} \right)$$

Procedendo analogamente si ottiene un ottimo atlante per $\mathbb{S}^n$, che induce su $\mathbb{R}^n$ una struttura di spazio compatto (**Alexandrov**).
Sia ora $n = 3$: allora la proiezione stereografica $\mathbb{S}^3 \setminus N \to \mathbb{R}^3$ manda (x_1, x_2, x_3, x_4) in $\left(\frac{x_1}{1-x_4} \; \frac{x_2}{1-x_4} \; \frac{x_3}{1-x_4} \right)$.
È noto che la proiezione stereografica è una mappa conforme, perchè lo è la metrica riemanniana definita naturalmente su $T_x\mathbb{S}^n$ da

$$ds^2 = 4\frac{\mathrm{d}\underline{x} \cdot \mathrm{d}\underline{x}}{(1 + \underline{x} \cdot \underline{x})^2}$$

- L'immagine di circonferenze (non passanti per N) su $\mathbb{S}^3$ è fatta da circonferenze in $\mathbb{R}^3$ (di raggio non infinito).

Ma allora. . .

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^3 \setminus \{N_3\} \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, equal] & \mathbb{S}^2 \setminus \{N_2\} \arrow[d, equal] \\ \mathbb{R}^3 & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

"Si può fare tutto in $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$":

- Se $a \in \mathbb{C}$ la retta complessa $u = av$ interseca $\mathbb{S}^3$ nella circonferenza $\left(\frac{ae^{i\theta}}{\sqrt{1+|a|^2}} \ \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1+|a|^2}} \right)$ (θ varia in $[0, 2\pi[$).
- Se quella circonferenza non passa per il polo Nord, proiettata su $\mathbb{R}^3$ resta una circonferenza: si identifica la coppia (u, v) ad una quaterna in $\mathbb{R}^4$ e. . .
- . . . la circonferenza in $\mathbb{R}^3$ che è fibra di un punto su $\mathbb{S}^2$ (privata di un punto, e identificata al piano, identificato a sua volta alla retta complessa dove a è stato originariamente scelto) ha equazione parametrica

$$[0, 2\pi[\ni \theta \mapsto \left(\frac{2\Re u}{1-\Im v} \quad \frac{2\Im u}{1-\Im v} \quad \frac{2\Re v}{1-\Im v} \right)$$

Una frase come "Vediamo subito che..." è fin troppo ben nota tra i matematici, come le sue compagne in infamia "È ovvio che..." ed "Ora, chiaramente, ..."; vogliono dire che il lettore si deve aspettare ore o giorni di fatica da spaccarsi la testa per illuminare l'oscurità - e scoprire magari alla fine che chi le ha scritte non si ricorda nemmeno più perché fosse ovvio. (Robert ed Ellen Kaplan)