Geometria Complessa

con punte di caffè

9 dicembre 2011

1 Prolegomeni.

1.1 Spazi lineari simplettici

Nel seguito V è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita.

Una forma bilineare $\omega\colon V \times V \to \mathbf{R}$ si dice alternante se $\omega(v, v) = 0$ (equivalentemente se $\omega(v, w) = -\omega(w, v)$ per ogni coppia di vettori $v, w \in V$).

Definizione 1.1 : *Lo spazio V si dice* simplettico *se è dotato di una forma bilineare alternante che sia non degenere, ossia tale che in una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V (e quindi in tutte) la matrice $\Omega = (\omega(v_i, v_j))$ è non degenere.*

Osservazione 1. La matrice Ω è antisimmetrica, ossia $\Omega^t = -\Omega$.

Osservazione 2. Se V è uno spazio vettoriale simplettico, la sua dimensione è pari:

$$\det \Omega = \det(\Omega^t) = (-1)^{\dim V} \det \Omega \tag{1}$$

Dunque dato che $\det \Omega \neq 0$, $1 = (-1)^{\dim V}$, e $\dim V = 2n$. $\square$

La classificazione per congruenza delle forme bilineari lascia come unico invariante la dimensione: sia $\omega\colon V \times V \to \mathbf{R}$ alternante non degenere. Scelto un vettore $v_1 \neq 0$, esiste w_1 tale che $\omega(v_1, w_1) = c \neq 0$, e senza perdita di generalità si può supporre $\omega(v_1, w_1) = 1$. Sia ora $W_2 = \langle v_1, w_1 \rangle$. $\omega|_{W_2}$ ha matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Se $\dim V > 2$ si procede trovando in $W_1^{\omega\perp}$ (ortogonale rispetto a ω) due vettori v_2, w_2 tali che $\omega(v_2, w_2) = 1$. Detto $W_4 = \langle v_1, w_1, v_2, w_2 \rangle$, $g\ |_{W_4}$ ha matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Da qui si procede in questo modo fino ad esaurire la dimensione di V, che come già visto deve essere pari.

Riordinando i vettori di base come $\{v_1, w_1, \dots v_k, w_k\}$ si ottiene la *forma canonica* delle applicazioni alternanti, ovvero la matrice $\left(\begin{smallmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I}_k \\ -\mathbb{I}_k & \mathbb{O} \end{smallmatrix}\right)$. Per brevità indicheremo a volte tale matrice con la lettera $\mathbb{E}$, e la chiameremo *unità simplettica*.

È corollario immediato di questa osservazione che una applicazione bilineare alternante non degenere ammette sempre un sottospazio isotropo di dimensione massima possibile (la metà della dimensione dello spazio).

La base $\mathcal{V} = \{v_1, w_1, \dots v_k, w_k\}$ in cui Ω ha matrice canonica è detta base simplettica per ω.

Esempio 1.1. $(\mathbf{R}^{2n}, \omega_0)$*, definita sulla base canonica* $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots e_{2n}\}$ *dalla matrice* $\left(\begin{smallmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & \mathbb{O} \end{smallmatrix}\right)$.

Esempio 1.2. *La somma diretta $V \oplus V^*$ di V col suo duale, dotata della forma ω tale che $\omega(v, \alpha), (w, \beta)) = \beta(v) - \alpha(w)$ (si scriva la matrice nella base canonica di $V \oplus V^*$ fatta da $e_1 \oplus 0, e_n \oplus 0, 0 \oplus e^1, \dots, 0 \oplus e^n$)*

1.2 Strutture lineari complesse.

Il dato di una *struttura lineare complessa* ad uno spazio vettoriale V consiste nell'assegnazione di una $J \in \mathrm{End}(V) \cong V \otimes V^* = T_1^1(V)$ tale che $J \circ J = J^2 = -\mathrm{id}_V$. La coppia $(V,)$ si dice *spazio vettoriale complesso*.

Osservazione 3. Assegnare una struttura lineare complessa su V equivale ad assegnare a V una struttura di $\mathbf{C}$-spazio vettoriale. Infatti avendo J, l'azione di $\mathbf{C}$ su V si definisce come $(z, v) \mapsto \Re z \cdot v + \Im z \cdot J(v)$ (perché non $(z, v) \mapsto \Re z \cdot v + \Im z \cdot v$?).

D'altra parte avendo l'azione di $\mathbf{C}$ su V si definisce $J\colon v \mapsto i \cdot v$.

Esempio 1.3. $(\mathbf{R}^{2n}, J_0)$ *ammette la struttura complessa canonica* $J_0 = \left(\begin{smallmatrix} \mathbb{O} & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \mathbb{O} \end{smallmatrix}\right)$.

Esempio 1.4. *Se V ammette una struttura complessa J, anche il duale di V è uno spazio complesso con la struttura data dalla trasposta:* $J^*\colon \alpha \mapsto (v \mapsto \alpha(Jv))$.

Osservazione 4. Salta all'occhio che ci sono strette relazioni tra le strutture simplettica e complessa canoniche su $\mathbf{R}^{2n}$: in particolare conti immediati permettono di verificare che $\omega_0(v, Jv) > 0$ se $v \neq 0$, e che J_0 è un'*isometria* per ω_0 (ossia $\omega_0(J_0 v, J_0 w) = \omega_0(v, w)$).

Più precisamente l'applicazione bilineare $G_{J_0}\colon (v, w) \mapsto \omega_0(v, Jw)$ è simmetrica e definita positiva, dunque un prodotto scalare per cui J_0 è un'isometria.

Definizione 1.2 : *Sia (V, ω) uno spazio vettoriale simplettico con una struttura J di spazio complesso. Allora J si dice* compatibile *rispetto a ω se l'applicazione bilineare $G_J\colon (u, v) \mapsto \omega(u, Jv)$ è un prodotto scalare.*

Proposizione 1.1 : *Ogni spazio simplettico ammette una struttura complessa compatibile.*

Dimostrazione. Scegliamo una base simplettica $\mathcal{V} = \{v_1, w_1, \dots v_k, w_k\}$ per V e definiamo J su tale base come l'applicazione lineare di matrice $\mathbb{E}$. Conti analoghi ai precedenti permettono di fare tutte le verifiche. □

Da ultimo ricordiamo che i *morfismi* tra spazi vettoriali simplettici sono fatti da quelle applicazioni lineari che "rispettano" le strutture simplettiche: un morfismo simplettico è una $\varphi\colon (W, \tau) \to (V, \omega)$ tale che $\varphi^*\omega = \tau$ (ossia $\tau(w_1, w_2) = \omega(\varphi w_1, \varphi w_2)$).

Due spazi vettoriali isomorfi tali che tra loro esista un morfismo simplettico si dicono *simplettomorfi*.

1.3 Varietà simplettiche.

Sia E un fibrato vettoriale liscio sopra una varietà M; una *struttura simplettica* su E consiste nel dato di una famiglia $\{\omega_x\}_{x \in E}$ di strutture simplettiche sugli spazi vettoriali che fanno da fibra in E, i quali "variano continuamente al variare del parametro x".

A titolo di esempio, per *struttura simplettica su M varietà liscia* si intende una struttura simplettica sul fibrato tangente TM nel senso precedente, che considerata come un elemento di $\bigwedge^2(TM)$ è chiusa ($\mathrm{d}\omega = 0$, condizione analitica) e non degenere ($\det \Omega \neq 0$ in una e quindi in ogni base di T_pM, condizione algebrica).

Esempio 1.5. $(\mathbf{R}^{2n}, \omega_1)$*, dove ω_1 è la traduzione di ω_0 in termini differenziali: nelle coordinate $\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\}$ è infatti definita da*

$$\omega_1 = \sum \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}y_i \tag{2}$$

Esempio 1.6. *$(\mathbf{C}^n, \omega_2)$, dove nelle coordinate complesse $\{z_1, \dots, z_n\}$ ω_2 è definita come*

$$\omega_2 = \sum \frac{i}{2} \mathrm{d}z_k \wedge \mathrm{d}\overline{z}_k. \tag{3}$$

In effetti i due spazi sono simplettomorfi mediante l'identificazione canonica tra $\mathbf{C}^n$ e $\mathbf{R}^{2n}$, $\psi\colon z_k \mapsto x_k + iy_k$: si mostri che $\psi^*\omega_2 = \omega_1$.

Esempio 1.7. *Consideriamo $\mathbb{S}^2 \subset \mathbf{R}^3$. Definiamo*

$$\omega_p\colon (u, v) \mapsto \langle p, u \times v\rangle. \qquad (\forall u, v \in T_p\mathbb{S}^2 = \langle p\rangle^\perp)$$

Tutte le proprietà sono facili da verificare. Per la non degenerazione, bisogna mostrare che dato $u \neq 0$ esiste v tale che $\omega_p(u, v) \neq 0$. Si scelga $v = u \times p$ e si ricordi che per tre vettori di $\mathbf{R}^3$ si ha $a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$

Esercizio. È possibile trovare una struttura simplettica su ogni superficie orientabile M di $\mathbf{R}^3$, definita come luogo degli zeri di una $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ tale che $\mathrm{d}f \neq 0$ su M. (Sugg.: se $M = \mathbb{S}^2$, tale f è $(x, y, z) \mapsto \dots$ e $\mathrm{d}f_p = \dots$).

Esempio 1.8. *Sia M una varietà liscia di dimensione $n \geq 1$, $\pi\colon T^*M \to M$ il suo fibrato cotangente, $\alpha \in \bigwedge^1(T^*M)$ definita da $p \mapsto (\mathrm{d}\pi_p)^*\xi$ per $p = (x, \xi) \in T^*M$ ($(\mathrm{d}\pi_p)^*\colon T^*_xM \to T^*_p(T^*M)$).*

La 1-forma α è detta 1-forma tautologica *o di Liouville su T^*M. Il suo differenziale esterno $\omega = -\mathrm{d}\alpha \in \bigwedge^2(T^*M)$ è la forma simplettica* canonica *su T^*M.*

Un atlante di T^*M si ottiene da un atlante di M: ci sono le coordinate locali $(T^*U, (\underline{x}, \underline{\xi}))$ dove $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\underline{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. In tali coordinate

$$\alpha = \sum \xi_i \mathrm{d}x_i, \qquad \omega = \sum \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}\xi_i \tag{4}$$

Esercizio. Sia $f\colon M \to N$ un diffeomorfismo di varietà. Mostrare che esso si rialza a un diffeomorfismo $T^*M \to T^*N$ che è un simplettomorfismo rispetto alle strutture standard ω_M, ω_N.

1.3.1 Teorema di Darboux e Ostruzioni alla Simpletticità.

Le varietà simplettiche sono "tutte" essenzialmente simili: il teorema di Darboux afferma che se (M, ω) è simplettica, per ogni $p \in U \subseteq M$ esiste una carta φ di M centrata in p il cui dominio è contenuto in U e tale che $\omega = \sum \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}\xi^i$ nelle coordinate locali indotte da φ su T^*_pM.

In altre parole due varietà simplettiche (M, ω_M), $(\mathcal{N}, \omega_N)$ sono localmente simplettomorfe se e solo se hanno la stessa dimensione. Il problema globale è difficile e in generale insoluto, tranne che in dimensione 2 e per M orientabile, dove Moser ha dimostrato che $(M, \omega_M) \cong (N, \omega_N)$ compatte sono simplettomorfe se e solo se sono diffeomorfe e $\int_M \omega_M = \int_N \omega_N$ (="volume totale" delle due varietà compatte: ancora Moser ha mostrato che questo è l'unico invariante simplettico di varietà compatte).

Vi sono varietà lisce che non ammettono strutture simplettiche (non esiste un analogo simplettico del teorema di Whitney per varietà riemanniane). Se per assurdo su $\mathbb{S}^4$ esistesse una 2-forma ω chiusa e non degenere, allora essa sarebbe esatta ($H^2_{\mathrm{dR}}(\mathbb{S}^4) = (0)$), dunque $\omega = \mathrm{d}\vartheta$ per qualche $\vartheta \in \Omega^1(\mathbb{S}^4)$, e $\Omega = \omega \wedge \omega$, forma volume su $\mathbb{S}^4$, sarebbe anch'essa esatta ($\mathrm{d}(\omega \wedge \vartheta) = \omega \wedge \omega$). Per il teorema di Stokes allora si avrebbe

$$\mathrm{vol}(\mathbb{S}^4) = \int_{\mathbb{S}^4} \Omega = \int_{\mathbb{S}^4} \mathrm{d}(\omega \wedge \vartheta) = \int_{\partial \mathbb{S}^4} \omega \wedge \vartheta = 0 \qquad (\partial \mathbb{S}^4 = \varnothing)$$

il che è visibilmente assurdo.

Esercizio. Mostrare che su $\mathbb{S}^{2k}$ non esiste una struttura simplettica, per ogni $k \geq 2$.

Le varietà che ammettono una struttura simplettica sono state, finora, tutte orientabili. Questo non è un caso:

Teorema 1.1 : *Una varietà simplettica (M, ω) è orientabile.*

Dimostrazione. Ricordiamo che M^n è orientabile se e solo se esiste una n-forma mai nulla su M, e che se M è simplettica $n = 2k$. Il ruolo di n-forma mai nulla è ora ricoperto proprio da ω^k, dato che è sufficiente valutare su una base di Darboux il prodotto $\omega \wedge \cdots \wedge \omega$. □

1.4 Varietà Complesse.

Questa sottosezione contiene il risultato chiave della geometria complessa elementare: il concetto di struttura complessa su uno spazio vettoriale complesso, si generalizza a quello di struttura *quasi* complessa su una varietà liscia. Dotare una varietà di una struttura quasi complessa però non equivale a darle una struttura complessa in senso analitico, ossia dotarla di un *atlante olomorfo* e vederla localmente diffeomorfa a $\mathbf{C}^n$ con dei cambi di coordinate biolomorfi.

In estrema sintesi, una varietà complessa ammette sempre una struttura quasi complessa canonica, ma esistono varietà quasi complesse che non sono varietà lisce su $\mathbf{C}$. Per fissare tale asimmetria Newlander e Nirenberg hanno dato un criterio per verificare se una struttura quasi complessa su M è la struttura quasi complessa canonica indotta da una struttura di varietà complessa.

Definizione 1.3 : *Una* varietà complessa di dimensione n *è uno spazio topologico di Hausdorff e 2-numerabile (quindi paracompatto) dotato di un* atlante olomorfo*, ossia di un ricoprimento aperto (U_i) tale che ad ogni U_i sia associata una funzione continua $\varphi_i \colon U_i \to \mathbf{C}^n$ che è un omeomorfismo sull'immagine, ed è tale che per ogni i, j coppia di indici tali che $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ la mappa $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ sia un (*bi*)olomorfismo.*

Osservazione 5. Una varietà liscia complessa M di dimensione n ha una struttura di varietà reale liscia di dimensione $2n$: infatti se (U_i, φ_i) è un atlante olomorfo per M, allora $(U_i, \Re\varphi_i, \mathrm{im}\,\varphi_i)$ è un atlante reale per M detto *atlante reale associato all'atlante complesso* (U_i).

Condizione necessaria a che una varietà sia complessa è che sia una varietà reale di dimensione pari, e che sia orientabile (chiaramente questo non è sufficiente).

Proposizione 1.2 : *Sia M una varietà complessa. Allora M è orientabile.*

Dimostrazione. Ricordiamo che una orientazione su una varietà liscia si definisce come la scelta di un'orientamento nell'insieme degli jacobiani dei cambi di carta: una varietà è orientabile se ogni jacobiano di cambio di carta ha determinante ovunque positivo od ovunque negativo.

Allora, prendiamo due carte locali φ con coordinate z_i e ψ con coordinate w_i, e siano (x_i, y_i), (u_i, v_i) le rispettive coordinate reali negli atlanti reali associati. Usando un po' di algebra lineare e ricordando che valgono le condizioni di Cauchy-Riemann sulle derivate parziali delle x, y, u, v si ha

$$\begin{aligned}
\det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right) &= \det\begin{pmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} & \frac{\partial u_i}{\partial y_j} \\ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} & \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} & -\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \\ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} & \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + i\frac{\partial v_i}{\partial x_j} & -\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \\ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - i\frac{\partial u_i}{\partial x_j} & \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \end{pmatrix} (I - iII) \\
&= \det\begin{pmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + i\frac{\partial v_i}{\partial x_j} & -\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \\ 0 & \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - i\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \end{pmatrix} (II + iI) \\
&= \left|\frac{\partial u_i}{\partial v_j} + i\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|^2 > 0 \qquad \square
\end{aligned}$$

Esempio 1.9 (Sfera di Riemann)**.** *Sulla sfera unitaria* $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ *c'è una struttura complessa data dalla proiezione stereografica dai due poli, che dà ad* $\mathbb{S}^2$ *un atlante complesso.*

$\mathbb{S}^2$ *eredita infatti da* $\mathbf{R}^3$ *la topologia di sottospazio, che è di Hausdorff e detti* $N = (0, 0, 1)$ *e* $S = (0, 0, -1)$*, gli insiemi* $U_N = \mathbb{S}^2 \setminus N$ *e* $U_S = \mathbb{S}^2 \setminus S$ *sono aperti in* $\mathbb{S}^2$*, e sono un suo ricoprimento.*

Definiamo

$$\begin{aligned}
\varphi_N \colon U_N \to \mathbf{C} \colon (x, y, z) &\mapsto \frac{x + iy}{1 - z} \\
\varphi_S \colon U_S \to \mathbf{C} \colon (x, y, z) &\mapsto \frac{x - iy}{1 + z}
\end{aligned}$$

scritte nelle coordinate reali associate al piano complesso: la prima mappa è la proiezione stereografica dal Polo Nord della sfera, la seconda è invece il coniugato *della proiezioni stereografica dal Polo Sud. Non ci fosse stata questa coniugazione, la mappa di transizione sarebbe stata* anti*olomorfa.*

Lemma 1.1 [Sfera di Riemann]**:** *φ_N, φ_S sono omeomorfismi di U_N, U_S in $\mathbf{C}$. φ_N, φ_S sono carte compatibili. $((U_N, \mathbf{C}, \varphi_N), (U_S, \mathbf{C}, \varphi_S))$ è un atlante di $\mathbb{S}^2$, che con tale struttura si chiama* sfera di Riemann.

Dimostrazione. Iniettività e suriettività si mostrano a mano con poca fatica, oppure ragionando geometricamente sul numero di intersezioni di una retta con una quadrica (un punto di intersezione è fissato a N o S, l'altro —per forza distinto se il punto sta nel piano $z = 0$

identificato con $\mathbf{C}$— esiste ed è unico).

$$\varphi_N^{-1}(z) = \frac{2}{|z|+1}\big(\Re z, \Im z, (|z|^2-1)/2\big),$$
$$\varphi_N^{-1}(z) = \frac{2}{|z|+1}\big(\Re z, -\Im z, (-|z|^2+1)/2\big).$$

Ora, $U_N \cap U_S = \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$ e $\varphi_N(U_N \cap U_S) = \varphi_S(U_N \cap U_S) = \mathbf{C}^\times$: l'applicazione $\varphi_S \circ \varphi_N^{-1} \colon \mathbf{C}^\times \to \mathbf{C}^\times$ è continua (composizione di continue) e invertibile (l'inversa è $\varphi_N \circ \varphi_N^{-1}$, che coincide con $\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}$) e dunque un omeomorfismo. Si ha

$$\varphi_S \circ \varphi_N^{-1} \colon z \mapsto \frac{\Re z}{|z|^2} - i\frac{\Im z}{|z|^2} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{1}{z} \tag{5}$$

dunque la funzione di transizione tra le carte coincide con l'inversione rispetto al circolo unitario, una volta identificato $\mathbf{R}^2 \cong \{x_3 = 0\} \cong \mathbf{C}$ con $(x, y) \mapsto (x, y, 0) \mapsto x + iy$, dal piano complesso bucato in sè. Tale applicazione è invertibile (anzi, involutoria) e olomorfa (composizione di olomorfe) in tutto il dominio, privo di singolarità (in $z = 0$ avrebbe un polo di ordine 1). $\square$

Definizione 1.4 [Superficie di Riemann]**:** *Una* superficie di Riemann *è una varietà complessa M di dimensione complessa* 1*. Se M è in più compatta, si dice* superficie di Riemann compatta*.*

Esempio 1.10. $\big(\mathbb{S}^2, \{(U_N, \mathbf{C}, \varphi_N), (U_S, \mathbf{C}, \varphi_S)\}\big)$ *è una superficie di Riemann compatta.*

Si osservi anche che tale superficie risulta dall'unione disgiunta $(\mathbf{C}^\times \amalg \mathbf{C}^\times)/\{z = 1/z\}$ di due copie del piano complesso bucato, incollate modulo la relazione che identifica punti immagine dell'inversione $z \mapsto \frac{1}{z}$.

Esempio 1.11 (Spazi Proiettivi Complessi)**.** *Definiamo su $\mathbf{C}^{n+1}$ la relazione*

$$x \sim y \iff x = \lambda y \text{ per qualche } \lambda \in \mathbf{C}^\times \tag{6}$$

Il quoziente per questa relazione si dice spazio proiettivo complesso *di dimensione n, e coincide con l'insieme delle rette per l'origine di $\mathbf{C}^{n+1}$. Il rappresentante di $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbf{C}^{n+1}$ si indica con $[x_0 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbf{C})$. Esiste allora una ovvia proiezione sul quoziente $\pi \colon (x_0, \dots, x_n) \mapsto [x_1 : \cdots : x_n]$.*

Lo spazio $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ si chiama retta proiettiva complessa*. Mostriamo che $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ è una superficie di Riemann compatta.*

Definiamo

$$U_1' = \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \setminus \{[0:1]\}, \quad \varphi_1 \colon U_1' \to \mathbf{C} \colon [x_0 : x_1] \mapsto x_1/x_0$$
$$U_2' = \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \setminus \{[1:0]\}, \quad \varphi_2 \colon U_2' \to \mathbf{C} \colon [x_0 : x_1] \mapsto x_0/x_1$$

Chiaramente $U_1' \cup U_2' = \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ e φ_1, φ_2 sono biiezioni ben definite (= indipendenti dai rappresentanti). Trasportiamo la topologia di $\mathbf{C}$ su U_1', U_2':

$$U \subseteq U_i' \text{ è aperto} \iff \varphi_1(U) \subseteq \mathbf{C} \text{ è aperto.} \tag{7}$$

le due topologie così determinate coincidono in $U_1' \cap U_2'$, dato che

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(\varphi_1(V)) = \varphi_2(V) \Rightarrow \big(\varphi_1(V) \text{ aperto} \Rightarrow \varphi_2(V) \text{ aperto}\big) \tag{8}$$

$$(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})(\varphi_2(V)) = \varphi_1(V) \Rightarrow \big(\varphi_2(V) \text{ aperto} \Rightarrow \varphi_1(V) \text{ aperto}\big) \tag{9}$$

in virtù del fatto che le composizioni $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ e $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ sono due biolomorfismi di $\mathbf{C}^\times$ in sè, coincidenti e uno l'inverso dell'altro.

Proposizione 1.3 : *Dotata della topologia conseguente dalla definizione in 7, la retta proiettiva complessa è uno spazio di Hausdorff compatto.*

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che se $p_1 \neq p_2$, nessuno dei due stia in $U_1' \cap U_2'$: allora per iniettività $\varphi_1(p_1) \neq \varphi_1(p_2)$, e queste immagini hanno due intorni disgiunti V_1, V_2 in $\mathbf{C}$: se definiamo $W_i = \varphi_1^{-1}(V_i)$, W_i è un intorno di p_i che non contiene l'altro punto. Supponiamo ora $\{p_1, p_2\} = \{[0:1], [1:0]\}$, e poniamo per esempio $p_1 = [0:1]$ e $p_2 = [1:0]$. Allora $p_2 \in U_1'$ con $\varphi_1(p_2) = 0$, e $p_1 \in U_2'$ con $\varphi_2(p_1) = 0$. Definiamo $W_i = \{q \in U_i' \mid |\varphi_i(q)| < 1\}$: W_i è un aperto (controimmagine del disco unitario $D(0,1[$ mediante φ_i) contenente p_2 per $i = 1$ e p_1 per $i = 2$. $W_1 \cap W_2 = \varnothing$: se $p \in W_1$, $|\varphi_2(p)| = \frac{1}{\varphi_1(p)|} > 1$ e allora $p \notin W_2$.

Se infine indichiamo con $\overline{D(0,1[} = D(0,1]$ il disco unitario chiuso in $\mathbf{C}$, si nota che

$$\mathbb{P}^1(\mathbf{C}) = \varphi_1^{-1}(D(0,1]) \cup \varphi_2^{-1}(D(0,1]) \tag{10}$$

Infatti se $P = [x_0 : x_1]$ ci sono tre casi possibili: se $|x_0| < |x_1|$ allora $P \in \varphi_2^{-1}(D(0,1])$. Se invece $|x_1| < |x_0|$, allora $P \in \varphi_1^{-1}(D(0,1])$, e se infine $|x_0| = |x_1|$, $P = [1:1]$ che sta in entrambi gli insiemi. Dunque $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ risulta da un'unione finita di immagini di compatti mediante omeomorfismi (che sono funzioni proprie con le loro inverse). □

Accettiamo il fatto che $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ è uno spazio topologico a base numerabile, e otteniamo come $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ diventa una superficie di Riemann compatta identificabile con $\widehat{\mathbf{C}}$, compattificazione di Alexandrov della retta complessa (con un punto). Detto in altre parole: $\varphi_1 \colon U_1' \to \mathbf{C}$ si estende ad una biiezione di insiemi $\widetilde{\varphi_1} \colon \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \to \widehat{\mathbf{C}}$ che diventa un omeomorfismo una volta data a $\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ la topologia di Alexandrov.

Il primo esempio si può generalizzare in modo insperato, arrivando ad asserire che *ogni superficie orientabile S* ammette una struttura complessa che la rende una superficie di Riemann. La costruzione fa ricorso a quelle che sono dette *coordinate isoterme* su S,e procede come segue.

Strutture Complesse su Superfici. Vogliamo dimostrare il

Teorema 1.2 : *Su ogni superficie riemanniana orientabile (S, g) esiste una struttura di superficie di Riemann.*

Definiamo perciò l'*operatore di Laplace–Beltrami* sulla superficie (S, g) come l'analogo del laplaciano che già si conosce dalla teoria degli operatori differenziali vettoriali:

lì $\Delta f = \operatorname{div}\operatorname{grad} f$, e qui, se f è una funzione differenziabile in un intorno di $p \in S$,

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right), \tag{11}$$

dove $|g| = |\det g|$, e g^{ij} è la componente ij della matrice inversa di g. La condizione di armonicità per f è allora

$$\Delta f = 0 = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sum_{j=1}^{2} g^{1j} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\sum_{j=1}^{2} g^{2j} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = 0 \tag{12}$$

Se poniamo

$$\omega_1 = -\sqrt{|g|} \sum_{j=1}^{2} g^{2j} \frac{\partial f}{\partial x_j} \qquad \omega_2 = \sqrt{|g|} \sum_{j=1}^{2} g^{1j} \frac{\partial f}{\partial x_j} \tag{13}$$

la condizione (12) diventa $\frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} = 0$, che si traduce nella chiusura della forma differenziale $\Omega = \omega_1 \mathrm{d}x_1 + \omega_2 \mathrm{d}x_2$.

Supponiamo ora di avere una soluzione all'equazione $\Delta f = 0$ in un intorno convesso U di $p \in S$, tale che $\mathrm{d}f_p \neq \underline{0}$. Poiché U è convesso e Ω è ivi chiusa, è anche esatta, ossia esiste una h tale che $\Omega = \mathrm{d}h$ su U. Se in

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} = -\sqrt{|g|} \sum_{j=1}^{2} g^{2j} \frac{\partial f}{\partial x_j} \tag{14}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_2} = \sqrt{|g|} \sum_{j=1}^{2} g^{1j} \frac{\partial f}{\partial x_j} \tag{15}$$

esplicitiamo $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}$ troviamo

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \sqrt{|g|} \left(g^{22} \frac{\partial h}{\partial x_2} + g^{12} \frac{\partial h}{\partial x_1} \right) \tag{16}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -\sqrt{|g|} \left(g^{21} \frac{\partial h}{\partial x_2} + g^{11} \frac{\partial h}{\partial x_1} \right) \tag{17}$$

Ora, dalle (14,15) otteniamo

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial h}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial h}{\partial x_1} = \sqrt{|g|} \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \tag{18}$$

Notiamo che $\sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}$ è il prodotto scalare indotto da g sul duale del piano tangente a S. Pertanto l'equazione precedente diventa

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial h}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial h}{\partial x_1} = \sqrt{|g|} \, \langle \mathrm{d}f \,|\, \mathrm{d}f \rangle \,. \tag{19}$$

Allo stesso modo da (16,17) si trovano le

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial h}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial h}{\partial x_1} = \sqrt{|g|}\,\langle \mathrm{d}h\,|\,\mathrm{d}h\rangle$$
$$0 = \frac{\partial h}{\partial x_2}\frac{\partial h}{\partial x_1} - \frac{\partial h}{\partial x_1}\frac{\partial h}{\partial x_2} = \sqrt{|g|}\,\langle \mathrm{d}f\,|\,\mathrm{d}h\rangle$$

Quindi su U si hanno le identità $\langle \mathrm{d}h\,|\,\mathrm{d}h\rangle = \langle \mathrm{d}f\,|\,\mathrm{d}f\rangle$ e $\langle \mathrm{d}f\,|\,\mathrm{d}h\rangle = 0$. Poiché $\mathrm{d}f_p \neq 0$ possiamo assumere (a meno di restringere U) che $\mathrm{d}f$ sia diverso da zero su U. Pertanto

$$\langle \mathrm{d}f\,|\,\mathrm{d}f\rangle = \langle \mathrm{d}h\,|\,\mathrm{d}h\rangle > 0, \qquad \langle \mathrm{d}f\,|\,\mathrm{d}h\rangle = 0 \tag{20}$$

Poniamo

$$\begin{cases} y_1 = f(x_1, x_2) \\ y_2 = h(x_1, x_2) \end{cases} ; \tag{21}$$

le (y_1, y_2) definiscono coordinate locali su U, e si dicono *coordinate isoterme* (il nome è dovuto al fatto che tali coordinate sono funzioni *armoniche*, ossia tali che $\Delta u = 0$, e sono dunque -almeno localmente- soluzioni stazionarie dell'equazione del calore; ogni insieme di livello di tali u è detto un'*isoterma* del sistema). Infatti si ha

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \sqrt{|g|}\,\langle \mathrm{d}f\,|\,\mathrm{d}f\rangle > 0 \tag{22}$$

Come si esprime la metrica g in queste coordinate? Non è difficile trovare che si ha

$$g^{11}_{\mathbf{y}} = \langle \mathrm{d}f\,|\,\mathrm{d}f\rangle = g^{22}_{\mathbf{y}}, \qquad g^{12}_{\mathbf{y}} = g^{21}_{\mathbf{y}} = 0 \tag{23}$$

e ricordando che g^{ij} è la componente ij della matrice inversa di g, otteniamo che su U g ha un'espressione del tipo $\lambda(y)\mathbb{I}$, ove $\lambda(y) = \langle \mathrm{d}f\,|\,\mathrm{d}f\rangle^{-1}$, che è compatibile con il cambio di coordinate: se in U' ci sono coordinate (y'_1, y'_2) si ha

$$g' = \begin{pmatrix} \lambda'(y') & 0 \\ 0 & \lambda'(y') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y'_1}{\partial y_1} & \frac{\partial y'_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial y'_2}{\partial y_1} & \frac{\partial y'_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \lambda(y) & 0 \\ 0 & \lambda(y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y'_1}{\partial y_1} & \frac{\partial y'_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial y'_2}{\partial y_1} & \frac{\partial y'_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} = J^t g J \tag{24}$$

se $J = \mathrm{Jac}\,\tau$, con τ mappa di transizione tra due carte nell'intersezione dei dominî. Esplicitando le relazioni nascoste nel prodotto di matrici lì sopra si ottiene

$$\left[\left(\frac{\partial y'_1}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'_2}{\partial y_1}\right)^2\right]\lambda(y) = \lambda'(y')$$
$$\left[\left(\frac{\partial y'_1}{\partial y_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'_2}{\partial y_2}\right)^2\right]\lambda(y) = \lambda'(y')$$
$$\frac{\partial y'_1}{\partial y_1}\frac{\partial y'_1}{\partial y_2} + \frac{\partial y'_2}{\partial y_1}\frac{\partial y'_2}{\partial y_2} = 0 \tag{25}$$

ossia in ogni punto di U deve valere una (e una sola) tra le relazioni seguenti

$$\begin{cases} \frac{\partial y_1'}{\partial y_1} = \frac{\partial y_2'}{\partial y_2} \\ \frac{\partial y_1'}{\partial y_2} = -\frac{\partial y_2'}{\partial y_1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial y_1'}{\partial y_1} = -\frac{\partial y_2'}{\partial y_2} \\ \frac{\partial y_1'}{\partial y_2} = \frac{\partial y_2'}{\partial y_1} \end{cases} \tag{26}$$

che sono equivalenti alle relazioni di (anti)olomorfia per τ. Da ultimo, si usa un argomento di connessione per mostrare che in U solo una delle precedenti relazioni può sussistere. In conclusione si ha il

Teorema 1.3 : *Ogni punto di una superficie (S, g) ha un intorno in cui esistono coordinate isoterme. Il legame tra due sistemi di coordinate isoterme su uno stesso intorno è espresso da una funzione olomorfa o antiolomorfa.*

1.5 Varietà quasi complesse e Integrabilità.

La nozione di varietà quasi complessa è la generalizzazione non lineare della nozione di spazio vettoriale complesso.

Definizione 1.5 : *Sia M una varietà liscia. Il dato di una* struttura quasi complessa *ad M consiste nell'assegnazione di una $J \in End(TM) = T_1^1(M)$ tale che $J \circ J = J^2 = -\operatorname{id}_{TM}$. La coppia (M, J) si dice* varietà quasi complessa.

In altre parole una struttura quasi complessa su M consiste di una sezione J del fibrato $T_1^1 M$, tale che (T_pM, J_p) sia uno spazio vettoriale complesso per ogni $p \in M$. Se $(U, \underline{x} = (x_1, \ldots, x_n))$ è una carta locale di M, in U si può scrivere J come

$$J = \sum J_{ik} \mathrm{d}x_i \otimes \frac{\partial}{\partial x_k} \tag{27}$$

ove $J_{ik} \in C^\infty(U)$ e si ha $\sum_s J_{is} J_{sk} = \delta_{ik}$.

Condizioni necessarie a ché una varietà sia quasi complessa è che abbia dimensione pari e sia orientabile. Queste condizioni non sono sufficienti, come dimostrato da Ehresmann e Hopf per $\mathbb{S}^4$.

Il fatto che $\dim M$ sia pari segue direttamente dal fatto che $\dim M = \dim_{\mathbf{R}} T_pM$, e dal fatto che T_pM ha dimensione pari essendo uno spazio vettoriale complesso.

Per l'orientabilità, mostriamo che il determinante di un cambio di carta è positivo. Scegliamo come base di T_pM la $2n$-upla $(x_1, \ldots, x_{2n}) = (x_1, \ldots, x_n, Jx_1, \ldots, Jx_n)$, e sia $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{2n}}\right\}$ un'altra base di T_pM equiorientata con la prima (perché si può trovare?). Quello fatto da basi del primo tipo è un atlante orientato, dato che se ne prendiamo due, $(x_1, \ldots, x_n, Jx_1, \ldots, Jx_n)$ e $(x_1', \ldots, x_n', Jx_1', \ldots, Jx_n')$ di T_pM, possiamo scrivere $x_i = \sum_k \alpha_{ik} x_k'$, e dunque $Jx_i = \sum_k \alpha_{ik} J x_k'$, e il determinante del cambio di carta è

$$\det \begin{pmatrix} \begin{matrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{matrix} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}^2 > 0 \tag{28}$$

Allora se $p \in U \cap U'$, dato che il cambio di coordinate tra $\underline{x}$ e $\underline{x}'$ è positivamente orientato, tale è anche il cambio di coordinate tra $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{2n}}\right\}$ e $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1'}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{2n}'}\right\}$.

1.5.1 Il teorema di Newlander e Nirenberg.

Ogni varietà complessa ammette una struttura di varietà quasi complessa. Il viceversa, in generale, è impedito da alcune ostruzioni: la nozione di *integrabilità* di una struttura quasi complessa dà un criterio in questo senso.

Proposizione 1.4 : *Sia M una varietà complessa. Allora su M c'è una struttura quasi complessa canonica (=indipendente da altre scelte che quella di un atlante complesso).*

Dimostrazione. Scegliamo una carta locale $(U, \underline{z} = (z_1, \dots, z_n))$ centrata in $p \in M$. La carta reale associata è $(U, (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n))$, dove $x_k = \Re z_k, y_k = \Im z_k$. Per ogni $q \in U$ poniamo

$$J_q \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_q \right) = \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_q \qquad\qquad J_q \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_q \right) = -\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_q \tag{29}$$

Mostriamo ora che questa è una buona definizione, ossia non dipende dalle carte scelte. Siano $(U, \underline{z} = \underline{x} + i\underline{y})$ e $(V, \underline{w} = \underline{u} + i\underline{v})$ due carte complesse in $p \in M$; le formule per il cambio di coordinate (che fanno scrivere $x_k = x_k(\underline{u}, = uvv)$ e $y_k = y_k(\underline{u}, = uvv)$) porgono

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_j \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial u_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial v_j} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y_k} = \sum_j \left(\frac{\partial u_j}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial u_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial v_j} \right) \end{cases} \tag{30}$$

Valgono però le relazioni di Cauchy-Riemann: $\frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial v_j}{\partial y_k}$ e $\frac{\partial u_j}{\partial y_k} = -\frac{\partial v_j}{\partial x_k}$. Allora se J e J' sono le strutture quasi complesse costruite come sopra nei due riferimenti, si ha

$$\begin{aligned} J' \frac{\partial}{\partial x_k} &= J' \left(\sum \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial u_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial v_j} \right) \\ &= \sum \frac{\partial v_j}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial u_j} + \frac{\partial u_j}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial u_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial y_k} = J \frac{\partial}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

In modo analogo $J' \frac{\partial}{\partial y_k} = J \frac{\partial}{\partial y_k}$ in tutto $U \cap V$. □

Osservazione 6. In effetti si può argomentare qualcosa di più raffinato: Su un intorno U_i di un atlante olomorfo (U_i, φ_i) definiamo $J_i = \varphi_{i*}^{-1} \circ J_c \circ \varphi_{i*}$, dove J_c è la struttura lineare complessa standard di $\mathbf{C}^n$; ora, $f_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ è olomorfa (ossia il suo pull-back commuta con J_c) e il prefascio dei tensori di tipo $(1,1)$ è anche un fascio, cosa che permette di definire una sezione globale incollando quelle locali.

Sia (M, J) una varietà quasi complessa di dimensione $2n$. Supponiamo che nell'intorno coordinato $U \subseteq M$ lo spazio delle 1-forme complesse abbia per base $\{\vartheta_k, \overline{\vartheta}_k\}$, per $k = 1, \dots, n$ e ogni ϑ_k è una forma complessa di tipo $(1,0)$ tale che $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ siano indipendenti. Allora volendo scrivere $\mathrm{d}\vartheta_k$ in coordinate si ha

$$\mathrm{d}\vartheta_k = \frac{1}{2} \sum_{j,\ell} a^k_{j\ell} \vartheta_j \wedge \vartheta_\ell + \sum_{j,\ell} b^k_{j\ell} \vartheta_j \wedge \overline{\vartheta}_\ell + \frac{1}{2} \sum_{j,\ell} c^k_{j\ell} \overline{\vartheta}_j \wedge \overline{\vartheta}_\ell \tag{31}$$

dove $a^k_{j\ell}, b^k_{j\ell}, c^k_{j\ell}$ sono funzioni lisce a valori complessi, antisimmetriche negli indici in basso.

Definizione 1.6 : *Nelle notazioni precedenti, J si dice* integrabile *se, per ogni $U \subseteq M$, vale la condizione*

$$\mathrm{d}\vartheta_k \equiv 0 \pmod{\vartheta_j} \qquad (\forall j, k)$$

ovvero se $c^k_{j\ell} = 0$ per ogni k, ℓ, j. Il tal caso, (M, J) si dice varietà quasi complessa integrabile.

Esercizio. Si dimostri che la definizione è ben posta: se $\{\lambda_k, \overline{\lambda}_k\}$ è un'altra base di 1-forme alle stesse condizioni della definizione, definite su $U \cap V \neq \varnothing$, allora $\lambda_k = \sum_j \mu_{jk}\vartheta_j$ per delle μ_{jk}: $\det(\mu_{jk}) \neq 0$. Scrivendo $\mathrm{d}\lambda_k = \frac{1}{2}\sum_{j,\ell} \tilde{a}^k_{j\ell}\lambda_j \wedge \lambda_\ell + \dots$ e sostituendo, si hanno delle relazioni sui coefficienti $\tilde{a}^k_{j\ell}, \tilde{b}^k_{j\ell}, \tilde{c}^k_{j\ell}$ che…

Il teorema seguente, dovuto per la quasi totalità a Newlander e Nirenberg, dà un criterio affinché una struttura quasi complessa sia integrabile, permettendo di caratterizzare come integrabili tutte e sole quelle strutture quasi complesse che sono indotte da una struttura complessa du M. Per la precisione, a Newlander e Nirenberg si deve la dimostrazione che $1 \iff 2$.

Definizione 1.7 [Tensore di Nijenhuis]**:** *Sia (M, J) una varietà quasi complessa. Definiamo il* tensore di Nijenhuis *come il tensore di tipo $(2, 0)$ dato da*

$$\nu_M(u, v) = [Ju, Jv] - J[u, Jv] - J[Ju, v] - [u, v]. \qquad (32)$$

Teorema 1.4 [NN]**:** *Sia (M, J) una varietà quasi complessa. Le seguenti condizioni sono equivalenti.*

- *J è integrabile;*
- *$\nu_M = 0$;*
- *M ha una struttura di varietà complessa e la struttura quasi complessa canonica da essa indotta coincide con J.*

2 Teoria di Dolbeault.

2.1 Fibrati tangente e cotangente complessificati.

Sia (M, J) una varietà quasi complessa. Il fibrato tangente *complessificato* a M, denotato $TM \otimes \mathbf{C}$ o $T^{\mathbf{C}}M$, è quello che ha per fibre i complessificati delle fibre di TM, di modo che $(TM \otimes \mathbf{C})_p = T_pM \otimes \mathbf{C}$.

Le relazioni che legano uno spazio vettoriale V reale al suo complessificato $V \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = V^{\mathbf{C}}$ si trasportano immutate alle fibre di $T^{\mathbf{C}}M$. In particolare è utile ricordare che $\dim_{\mathbf{R}} T_pM = 2n = \dim_{\mathbf{C}} T^{\mathbf{C}}M$, e che ogni vettore in $V^{\mathbf{C}}$ si scrive in un solo modo come $v_1 \otimes 1 + v_2 \otimes i$ (si indica questo fatto scrivendo che $V^{\mathbf{C}} \cong V \oplus iV$).

La struttura complessa J viene estesa a $TM \otimes \mathbf{C}$ in modo ovvio (in effetti, per funtorialità della corrispondenza $V \otimes V^{\mathbf{C}}$):

$$J_p(v \otimes \alpha) = J(v) \otimes \alpha \qquad\qquad (\forall v \in T_pM,\ \alpha \in \mathbf{C})$$

Nel seguito, essendo chiaro dal contesto se ci riferiamo a J o alla sua complessificazione, continueremo a indicare entrambi con lo stesso simbolo.

Proposizione 2.1 : *J ha due autovalori complessi distinti, $\pm i$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $Jv = \lambda v$. Allora $-v = \lambda Jv = \lambda^2 v$, ossia $(1+\lambda^2)v = 0$, che implica $\lambda = \pm i$. □

Chiamiamo $T_{p,1|0}$ l'autospazio di i, e $T_{p,0|1}$ l'autospazio di $-i$ in T_pM; i primi si dicono *vettori tangenti olomorfi*, e i secondi *antiolomorfi*. Indichiamo con $T_{1|0} = \coprod_{p\in M} T_{p,1|0}$, $T_{0|1} = \coprod_{p\in M} T_{p,0|1}$ rispettivamente gli spazi totali dei fibrati olomorfo e antiolomorfo ad M.

Proposizione 2.2 :

$$T_{1|0} = \{v \otimes 1 - Jv \otimes i \mid v \in TM\}$$
$$T_{0|1} = \{v \otimes 1 + Jv \otimes i \mid v \in TM\}$$

Dimostrazione. È evidente che valgono le inclusioni $\supseteq$. Per l'inclusione opposta, basta trattare il caso di $T_{1|0}$ perché l'altro è formalmente analogo: se ogni vettore nel complessificato $T^{\mathbf{C}}M$ si scrive come $v_1 \otimes 1 + v_2 \otimes i$, e se $w \in T_{1|0}$, allora $Jw = iw$. Dunque

$$J(v_1 \otimes 1 + v_2 \otimes i) = i(v_1 \otimes 1 + v_2 \otimes i)$$
$$Jv_{\otimes} 1 + Jv_2 \otimes i = -v_2 \otimes 1 + v_1 \otimes i$$

Col che, $v_2 = -Jv_1$, e $w = v_1 \otimes 1 - Jv_1 \otimes i$. □

Definiamo allora

$$\begin{aligned} \pi_{1|0} \colon TM &\longrightarrow T_{1|0} \\ v &\longmapsto \tfrac{1}{2}(v \otimes 1 - Jv \otimes i), \\ \pi_{0|1} \colon TM &\longrightarrow T_{0|1} \\ v &\longmapsto \tfrac{1}{2}(v \otimes 1 + Jv \otimes i). \end{aligned}$$

Tali mappe sono, per quanto mostrato, isomorfismi di fibrati reali. Con un conto diretto si mostra la

Proposizione 2.3 :

$$\begin{cases} \pi_{1|0} \circ J = i \cdot \pi_{1|0} \\ \pi_{0|1} \circ J = -i \cdot \pi_{0|1} \end{cases} \tag{33}$$

Corollario. $\overline{T_{1|0}} \cong T_{0|1} \cong TM$, e anche $TM \cong T_{1|0} \cong \overline{T_{0|1}}$ (la barra indica il fibrato coniugato).

Commettendo l'abuso di notazione di indicare ancora con $\pi_{0|1}, \pi_{1|0}$ le rispettive mappe complessificate, definiamo la mappa

$$\begin{aligned} (\pi_{0|1}, \pi_{1|0})\colon T^{\mathbf{C}}M &\longrightarrow T_{1|0} \oplus T_{0|1} \\ v &\longmapsto (\pi^{\mathbf{C}}_{0|1}(v), \pi^{\mathbf{C}}_{1|0}(v)) \end{aligned} \tag{34}$$

la quale è un isomorfismo.

Esercizio. Ripetere tutto quanto fatto finora sul fibrato cotangente:, ossia trovare un isomorfismo

$$(\pi^{1|0}, \pi^{0|1})\colon T^*M \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \to T^{1|0} \oplus T^{0|1} \tag{35}$$

dove $T^{1|0} = \{\eta \in T^*M \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \mid \eta(J(v)) = i \cdot \eta(v)\}$ e $T^{0|1} = \{\eta \in T^*M \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \mid \eta(J(v)) = -i \cdot \eta(v)\}$.

2.2 (l, m)-forme differenziali.

Sia (M, J) una varietà quasi complessa. Definiamo per ogni $k \in \mathbf{N}$ lo spazio $\Omega^k(M, \mathbf{C})$ delle k-forme differenziali complesse, sezioni del fibrato $\bigwedge^k(T^{\mathbf{C}}M^*)$. Si osservi che, grazie alla proprietà esponenziale dell'algebra esterna,

$$\begin{aligned} \textstyle\bigwedge^k(T^{\mathbf{C}}M^*) &= \textstyle\bigwedge^k(T^{1|0}(M) \oplus T^{0|1}(M)) = \\ &= \textstyle\bigoplus_{l+m=k} \bigwedge^l(T^{1|0}(M)) \otimes \bigwedge^m(T^{0|1}(M)) =: \bigoplus_{l+m=k} \bigwedge^{l,m}(M). \end{aligned} \tag{36}$$

ove si è definito $\bigwedge^{l,m}(M) = \bigwedge^l(T^{1|0}) \otimes \bigwedge^m(T^{0|1})$. Si noti in particolare che

$$\textstyle\bigwedge^{1,0}(M) = T^{1|0}(M), \qquad \bigwedge^{0,1}(M) = T^{0|1}(M). \tag{37}$$

Passando ai rispettivi fibrati possiamo definire

	Fibrato	**Sezione**
k-forme complesse	$\bigwedge^k M^{\mathbf{C}} \xrightarrow{\pi} M$	$\Omega^k(M) = \Gamma(\bigwedge^k M^{\mathbf{C}}, \pi)$
forme complesse	$\bigwedge^\bullet M^{\mathbf{C}} \xrightarrow{\pi'} M$	$\Omega^\bullet(M) = \Gamma(\bigwedge^\bullet M^{\mathbf{C}}, \pi')$
(l, m)-forme complesse	$\bigwedge^{l,m}(M) \xrightarrow{\pi''} M$	$\Omega^{l,m}(M) = \Gamma(\bigwedge^{l,m}(M), \pi'')$

Si ha dunque

$$\Omega^k(M) = \bigoplus_{l+m=k} \Omega^{l,m}(M), \tag{38}$$

e $\Omega^\bullet(M) = \bigoplus_{k\geq 0} \Omega^k(M)$.

Se ora su M c'è una struttura quasi complessa integrabile, ovvero una struttura complessa che è compatibile con J, allora una forma $\alpha \in \Omega^k(M)$ si scrive nei due modi

$$\alpha = \sum_{l+m=k} \pi_{l,m}(\alpha)$$
$$\alpha = \sum_{\substack{|I|+|J|=k \\ |I|=l,|J|=m}} \alpha_{IJ} \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\overline{z}_J$$

dove $\pi_{l,m}\colon \Omega^\bullet(M) \to \Omega^{l,m}(M)$, $\mathrm{d}z_i$ sono coordinate locali in un opportuno dominio U di carta complessa e $\alpha_{IJ} \in C^\infty(U, \mathbf{C})$.

Esercizio. La definizione non dipende dalle coordinate: se $V, w_k)$ è un'altra carta complessa tale che $U \cap V \neq \varnothing$, si ha $z_k = z_k(w_1, \ldots, w_n)$ e dunque $\mathrm{d}z_k = \ldots$, $\mathrm{d}\overline{z}_k = \ldots$

2.3 Operatori ∂ e $\overline{\partial}$.

Sia (M, J) una varietà quasi complessa.

Si rammenti la definizione di *derivazione esterna* sull'algebra delle forme differenziali come l'unica antiderivazione $\mathrm{d}\colon \Omega(M, \mathbf{R}) \to \Omega(M, \mathbf{R})$ di grado $+1$ tale che $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$ e che $\mathrm{d}|_{C^\infty(U)} = \mathrm{d}|_{\Omega^0(U)}$ coincida con l'usuale differenziale di funzioni lisce.

Esso si estende per $\mathbf{C}$-linearità, in modo unico, ad un operatore $\mathrm{d}^{\mathbf{C}}\colon \Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(M)$, con le stesse proprietà, che da ora in poi chiameremo di nuovo d.

Proposizione 2.4 :

$$\mathrm{d}\left(\Omega^{l,m}(M)\right) \subseteq \Omega^{l+2,m-1}(M) \oplus \Omega^{l,m+1}(M) \oplus \Omega^{l+1,m}(M) \oplus \Omega^{l-1,m+2}(M). \quad (39)$$

Dimostrazione. Doppia induzione sulla coppia (l, m). □

Da tale risultato, e rammentando che per ogni $i, j = 1, \ldots, n$ possiamo definire la proiezione $\pi_{i,j}\colon \Omega^\bullet(M) \to \Omega^{i,j}(M)$, si hanno le definizioni

$$\Sigma := \pi_{p+2,q-1} \circ \mathrm{d}$$
$$\partial := \pi_{p+1,q} \circ \mathrm{d}$$
$$\overline{\partial} := \pi_{p,q+1} \circ \mathrm{d}$$
$$\overline{\Sigma} := \pi_{p-1,q+2} \circ \mathrm{d}$$

La quantità $\Sigma + \overline{\Sigma}$ costituisce una ostruzione all'integrabilità della struttura quasi complessa di M. Difatti è facile dimostrare che il teorema di Newlander-Nirenberg precedentemente enunciato può essere esteso al seguente

Teorema 2.1 [NN FORTE]**:** *Sia (M, J) una varietà quasi complessa. Sia ν il tensore di Nujenhis di M. La seguenti condizioni sono equivalenti:*

- *M è una varietà complessa e J è la struttura quasi complessa canonica ad essa associata;*
- *J è integrabile;*
- *$\nu \equiv 0$;*
- *$\mathrm{d} = \partial + \overline{\partial}$;*
- *$\partial \circ \partial = 0$;*
- *$\overline{\partial} \circ \overline{\partial} = 0$.*

(Si tralascino le implicazioni $3 \Rightarrow 1$, $2 \Rightarrow 1$, che costituiscono il nucleo del teorema di Newlander e Nirenberg).

2.3.1 Funzioni J-omolorfe e antiolomorfe.

Consideriamo $f \in C^\infty(M)$. Come già detto la derivata esterna di f, che qui coincide con l'usuale differenziale, si estende per $\mathbf{C}$-linearità alle funzioni lisce $f\colon M \to \mathbf{C}$ come $\mathrm{d}^{\mathbf{C}} f = \mathrm{d}\Re f + i\mathrm{d}\Im f$.

Definizione 2.1 : *Una funzione $f \in C^\infty(M, \mathbf{C})$ si dice* J-olomorfa *(risp.,* J-antiolomorfa*) in $p \in M$ se $\mathrm{d}f_p$ è $\mathbf{C}$-lineare (risp., $\mathbf{C}$-antilineare), ossia se $\mathrm{d}f_p \circ J = i \cdot \mathrm{d}f_p$ (risp., se $\mathrm{d}f_p \circ J = -i \cdot \mathrm{d}f_p$).*

Esercizio. Si mostri che

$$
\begin{aligned}
f \text{ è } J\text{-olomorfa} \iff \mathrm{d}f_p \in T^{1|0}(M) \iff \pi_p^{0|1}\mathrm{d}f_p = 0;\\
f \text{ è } J\text{-antiolomorfa} \iff \mathrm{d}f_p \in T^{0|1}(M) \iff \pi_p^{1|0}\mathrm{d}f_p = 0.
\end{aligned}
$$

Si noti che (per motivi di dimensione) $\mathrm{d}|_{C^\infty(M,\mathbf{C})} = \partial + \overline{\partial}$. Allora f è olomorfa se e solo se $\overline{\partial} f = 0$ e antiolomorfa se e solo se $\partial f = 0$. Cosa accade, di preciso, per forme differenziali di grado maggiore?

2.3.2 Coomologia di Dolbeault.

Supponiamo che $\mathrm{d} = \partial + \overline{\partial}$. Allora per ogni $\beta \in \Omega^{l,m}(M)$ si ha

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\beta = \partial\beta + \overline{\partial}\beta\\
0 = \mathrm{d}^2\beta = \partial^2\beta + (\partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial)\beta + \overline{\partial}^2\beta.
\end{aligned}
$$

La seconda di queste relazioni implica che $\overline{\partial}^2 = \partial^2 = \partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial = 0$. Dal momento che per il Teorema di Newlander-Nirenberg forte $\mathrm{d} = \partial + \overline{\partial} \iff \partial^2 = \overline{\partial}^2 = 0$, questo si traduce nella relazione non triviale $\partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial = 0$, che implica che la successione $(\Omega^{l,m})$ è un bicomplesso di cocatene i cui differenziali verticale e orizzontale sono, rispettivamente, proprio ∂ e $\overline{\partial}$. In altre parole la sequenza

$$
0 \to \Omega^{l,0}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}} \Omega^{l,1} \xrightarrow{\overline{\partial}} \Omega^{l,2} \xrightarrow{\overline{\partial}} \cdots \tag{40}
$$

è per ogni $l \geq 0$ un complesso di cocatene i cui gruppi di coomologia sono

$$H^{l,m}_{\text{Db}}(M) := \frac{Z^{l,m}_{\overline{\partial}}(M)}{B^{l,m}_{\overline{\partial}}(M)} = \frac{\ker \overline{\partial}|_{\Omega^{l,m}}}{\operatorname{im} \overline{\partial}|_{\Omega^{l-1,m}}} \tag{41}$$

(forme chiuse modulo esatte).

Analoghe definizioni ovviamente si possono dare per quanto riguarda ∂, ottenendo i gruppi di ∂-coomologia di Dolbeault di M, denotati con $H^{l,m}_{\text{Db}}(M)$. Infine si definiscono i *numeri di* $\partial, \overline{\partial}$*-Hodge* di M come

$$h_{\partial,l,m}(M) = \dim_{\mathbf{R}} H^{l,m}_{\text{Db}}(M), \qquad h_{\overline{\partial},l,m} = \dim_{\mathbf{R}} H^{l,m}_{\overline{\text{Db}}}(M). \tag{42}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\Omega^{0,0}(M) & \xrightarrow{\overline{\partial}} & \Omega^{0,1}(M) & \xrightarrow{\overline{\partial}} & \Omega^{0,2}(M) & \xrightarrow{\overline{\partial}} & \cdots \\
\partial\big\downarrow & & \partial\big\downarrow & & \partial\big\downarrow & & \\
\Omega^{1,0}(M) & \xrightarrow{\overline{\partial}} & \Omega^{1,1}(M) & \xrightarrow{\overline{\partial}} & \cdots & & \\
\partial\big\downarrow & & \partial\big\downarrow & & & & \\
\Omega^{2,0}(M) & \xrightarrow{\overline{\partial}} & \cdots & & & &
\end{array} \tag{43}$$

Il seguente risultato è l'analogo in coomologia di Dolbeault del Lemma di Poincarè:

Teorema 2.2 [Lemma di Dolbeault-Poincarè per $\overline{\partial}$]**:** *Sia M una varietà complessa, e $\alpha \in \Omega^{l,m}(M)$ una forma $\overline{\partial}$-chiusa. Allora α è localmente $\overline{\partial}$-esatta, ossia per ogni $\in M$ esiste un intorno $U \subseteq M$ tale che $H^{l,m}_{\overline{\text{Db}}}(U) = (0)$.*

2.3.3 (l, m)-forme su una Varietà Complessa.

Prima di introdurre le varietà di Kähler, è opportuno interessarsi a come appare la decomposizione $\Omega^k(M) = \bigoplus_{l+m=k} \Omega^{l,m}(M)$ una volta scelto un atlante complesso per M.

Scelta una tale carta $(U, (z_k))$, la cui carta reale associata è $(U, (x_k), (y_k))$, è ben noto che $T_pM = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_p : j = 1, \ldots, n \right\rangle_{\mathbf{R}}$, e che dunque $T^{\mathbf{C}}_p M = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_p : j = 1, \ldots, n \right\rangle_{\mathbf{C}}$. Ricordando però la decomposizione di $T_pM \otimes \mathbf{C}$ nei due autofibrati fatti dagli autospazi di J, si ha anche

$$\begin{aligned}
T^{\mathbf{C}}_p M &= T_{1|0}(M) \oplus T_{0|1}(M) = \\
&= \left\langle \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p - i \frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_p \Big) \right\rangle_{\mathbf{C}} \oplus \left\langle \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p + i \frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_p \Big) \right\rangle_{\mathbf{C}}.
\end{aligned} \tag{44}$$

Definendo

$$\frac{\partial}{\partial z_j} := \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \Big) \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} := \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \Big) \tag{45}$$

si ha dunque che $T_{0|1} = \langle \frac{\partial}{\partial z_j} : j = 1, \ldots, n \rangle$ e $T_{1|0} = \langle \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} : j = 1, \ldots, n \rangle$.

Esercizio. Ottenere simili rappresentazioni per $T^{1|0}(M)$ e $T^{0|1}(M)$.

In un intorno coordinato è dunque evidente che (con un po' di fatica) una k-forma $\beta \in \Omega^k(M)$ si può scrivere come

$$\beta = \sum_{l+m=k} \sum_{|I|=l,|J|=m} b_{IJ} \cdot \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\overline{z}_J, \qquad (b_{IJ} \in C^\infty(U, \mathbf{C}))$$

e che quindi $\mathrm{d}\beta$ si scrive

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\beta &= \sum_{l+m=k} \sum_{|I|=l,|J|=m} \mathrm{d}b_{IJ} \wedge \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\overline{z}_J \\
&= \sum_{l+m=k} \sum_{|I|=l,|J|=m} \left(\partial b_{IJ} + \overline{\partial} b_{IJ}\right) \wedge \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\overline{z}_J \qquad (\mathrm{d}|_{C^\infty(M,\mathbf{C})} = \partial + \overline{\partial}) \\
&= \sum_{l+m=k} \left(\underbrace{\textstyle\sum_{|I|=l,|J|=m} \partial b_{IJ} \wedge \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\overline{z}_J}_{\Omega^{l+1,m}(M)} + \underbrace{\textstyle\sum_{|I|=l,|J|=m} \overline{\partial} b_{IJ} \wedge \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\overline{z}_J}_{\Omega^{l,m+1}(M)} \right) \\
&= \partial\beta + \overline{\partial}\beta.
\end{aligned}$$

3 Varietà di Kähler.

Esistono varie definizioni di varietà di Kähler, che si appellano alla loro struttura ricca sotto il punto di vista algebrico e geometrico; usiamo qui la più semplice in rapporto alle definizioni già date nel corso della nota.

Definizione 3.1 : *Una* varietà di Kähler *è una varietà simplettica* (M, ω) *equipaggiata con una struttura quasi complessa* ω*-compatibile e integrabile. In tali condizioni la forma* ω *è chiamata* forma di Kähler *di* M.

Dalla definizione segue immediatamente che se (M, ω) è di Kähler, allora M ammette una struttura di varietà complessa, e $\mathrm{d} = \partial + \overline{\partial}$ nelle notazioni ormai consolidate. In delle coordinate complesse $(U, (z_k))$ allora si può scrivere ogni (l, m)-forma β come

$$\sum_{|I|=l,|J|=m} b_{IJ} \wedge \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\overline{z}_J. \tag{46}$$

D'altra parte è anche evidente che se (M, ω) è Kähler, ω è una forma simplettica (con tutto ciò che segue, geometricamente e algebricamente).

Una forma di Kähler è una 2-forma ω, compatibile con le strutture complessa e quasi complessa di J, chiusa, reale e non degenere: in che modo queste proprietà si adeguano alla decomposizione di $\Omega^\bullet(M)$ che abbiamo studiato prima?

- Innanzitutto, $\Omega^2(M, \mathbf{C}) = \Omega^{2,0}(M) \oplus \Omega^{1,1}(M) \oplus \Omega^{0,2}(M)$; dunque in una carta complessa $(U, (z_k))$ si ha

$$\omega = \sum a_{jk} \mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}z_k + \sum b_{jk} \mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}\overline{z}_k + \sum c_{jk} \mathrm{d}\overline{z}_j \wedge \overline{z}_k \tag{47}$$

per certe $a_{jk}, b_{jk}, c_{jk} \in C^\infty(U, \mathbf{C})$.

- In secondo luogo, J è un simplettomorfismo rispetto a ω; questo vuol dire che $J^*\omega = \omega$, ossia (dato che le forme $\mathrm{d}z_j$ sono olomorfe e le $\mathrm{d}\overline{z}_k$ antiolomorfe) $J^*\mathrm{d}z_j = i\mathrm{d}z_j$ e $J^*\mathrm{d}\overline{z}_k = -i\mathrm{d}\overline{z}_k$. Allora

$$J^*\omega = i^2 \sum a_{jk}\mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}z_k + i(-1)\sum b_{jk}\mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}\overline{z}_k + (-i)^2 \sum c_{jk}\mathrm{d}\overline{z}_j \wedge \overline{z}_k, \quad (48)$$

  e $J^*\omega = \omega \iff a_{jk} = 0 = c_{jk}$, ossia se e solo se $\omega \in \Omega^{1,1}(M)$.

  Ponendo $b_{jk} = \frac{i}{2}h_{jk}$ si può scrivere

$$\omega = \frac{i}{2}\sum_{j,k=1}^{n} h_{jk}\mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}\overline{z}_k. \quad (49)$$

- La chiusura di ω si traduce nella condizione

$$0 = \mathrm{d}\omega = \partial\omega + \overline{\partial}\omega \Rightarrow \omega \text{ è } \partial, \overline{\partial}\text{-chiusa}. \quad (50)$$

  Perciò ω definisce una classe di coomologia di Dolbeault $[\omega] \in H^{1,1}_{\mathrm{Db}}(M)$.

- Il fatto che ω è reale si traduce in una condizione sugli h_{jk}:

$$\overline{\omega} = -\frac{i}{2}\sum \overline{h_{jk}} \cdot \mathrm{d}\overline{z}_j \wedge \mathrm{d}z_k = \frac{i}{2}\sum \overline{h_{jk}} \cdot \mathrm{d}z_k \wedge \mathrm{d}\overline{z}_j = \frac{1}{2}\sum \overline{h_{kj}}\mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}\overline{z}_k \quad (51)$$

  dunque $h_{jk} = \overline{h_{kj}}$, ossia la matrice (h_{jk}) è hermitiana.

- Si verifichi come esercizio che la non-degenerazione implica che la forma volume canonica di M $\omega^n = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ si scrive come

$$i^n \frac{n!}{2^n}\det(h_{jk}) \cdot \mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}\overline{z}_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z_n \wedge \mathrm{d}\overline{z}_n \quad (52)$$

  e dunque ω è non degenere se e solo se $\det(h_{jk}(p)) \neq 0$ per ogni $p \in M$.

Dalla compatibilità tra le strutture si ricava infine che per ogni vettore non nullo $\omega(v, Jv) > 0$, quindi $\det(h_{jk}) > 0$, facendo di ogni $h_{jk}(p))$ una metrica hermitiana definita positiva.

3.1 Potenziali Kähleriani.

Quella che segue è una "ricetta" per ottenere forme di Kähler su varietà. Se da una parte date una varietà complessa M e una opportuna funzione si può costruire su M una forma di Kähler, dall'altra una forma di Kähler si può, almeno localmente, ricavare a partire da una funzione. Tale funzione si dice *potenziale kähleriano*.

Scopo di questa sezione è rendere più precise tali affermazioni.

Definizione 3.2 : *Sia M una varietà complessa. Una funzione $\varrho \in C^\infty(M, \mathbf{R})$ si dice* strettamente plurisubarmonica *se in ogni carta complessa $(U, (z_k))$ di M la matrice $\left(\frac{\partial^2\varrho}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}\right)_{jk}$ è definita positiva per ogni $p \in U$.*

Proposizione 3.1 : *Sia M una varietà complessa e $\varrho \in C^\infty(M, \mathbf{R})$ strettamente plurisubarmonica. Allora*

$$\omega_\varrho = \frac{i}{2}\partial\overline{\partial}\varrho \tag{53}$$

è una forma di Kähler.

Dimostrazione. Bisogna anzitutto verificare che ω_ϱ è chiusa. Perciò si osservi semplicemente che

$$\partial\omega_\varrho = \frac{1}{2}\partial^2\overline{\partial}\varrho = 0$$

$$\overline{\partial}\omega_\varrho = \frac{i}{2}\overline{\partial}\partial\overline{\partial}\varrho = -\frac{i}{2}\partial\overline{\partial}\varrho = 0$$

e dunque $\mathrm{d}\omega = (\partial + \overline{\partial})\omega = 0$. In secondo luogo

$$\overline{\omega} = -\frac{i}{2}\overline{\partial}\partial\varrho = \frac{i}{2}\partial\overline{\partial}\varrho = \omega, \tag{54}$$

e dunque ω è reale. Infine, dato che $\omega \in \Omega^{1,1}(M)$, $J^*\omega = \omega$, e si verifica la compatibilità.

Resta da verificare la positiva definitezza di h_{jk} nella scrittura 49 per ω. Perciò si osservi che se $f \in C^\infty(U, \mathbf{C})$,

$$\partial f = \sum \frac{\partial F}{\partial z_j}\mathrm{d}z_j, \qquad \overline{\partial} f = \sum \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j}\mathrm{d}\overline{z}_j \tag{55}$$

e dunque

$$\omega = \frac{i}{2}\partial\overline{\partial}\varrho = \frac{i}{2}\sum \frac{\partial}{\partial z_j}\frac{\partial \varrho}{\partial \overline{z}_k}\mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}\overline{z}_k = \frac{i}{2}\sum \overbrace{\frac{\partial^2 \varrho}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}}^{(h_{jk})}\mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}\overline{z}_k. \tag{56}$$

A questo punto l'ipotesi di stretta plurisubarmonicità di ϱ permette di concludere che $\det(h_{jk}) > 0$. $\square$

Un parziale inverso della precedente costruzione è il seguente

Teorema 3.1 : *Sia ω una $(1,1)$-forma chiusa e a valori reali sulla varietà complessa M, e sia $p \in M$. Allora esistono un intorno $U \subseteq M$ di p e una funzione $\varrho_\omega \in C^\infty(U, \mathbf{R})$ tali che, su U,*

$$\omega = \frac{i}{2}\partial\overline{\partial}\varrho_\omega. \tag{57}$$

La funzione ϱ_ω è detta potenziale di Kähler *di ω.*

Ciò dice che, almeno localmente, ogni forma di Kähler si scrive $|omega = i\partial\overline{\partial}\varrho$ per qualche potenziale di Kähler ϱ.

Esempio 3.1. *Consideriamo $M = \mathbf{C}^n \cong \mathbf{R}^{2n}$ con le coordinate complesse canoniche. Il potenziale di Kähler globale della forma simplettica standard ω_0 è dato da*

$$\varrho\colon (z_1, \ldots, z_n) = \sum |z_j|^2 = \sum z_j\overline{z}_j \tag{58}$$

Infatti è semplice verificare che $\left(\frac{\partial^2 \varrho}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}\right)$ *è la matrice identica, e dunque* ϱ *è strettamente plurisubarmonica. La forma di Kähler corrispondente a* ϱ *è esattamente*

$$\omega = \frac{i}{2}\partial\overline{\partial}\omega = \frac{i}{2}\sum \mathrm{d}z_k \wedge \mathrm{d}\overline{z}_k. \tag{59}$$

Osservazione 7. Quanto finora osservato consente di formulare una definizione alternativa di varietà di Kähler: si tratta di una varietà complessa M cui sia data una famiglia di aperti che la ricoprono e una famiglia di funzioni lisce reali (U_k, ϱ_k) tali che per ogni coppia di indici r, s si abbia $\partial\overline{\partial}\varrho_r|_{U_{rs}} = \partial\overline{\partial}\varrho_s|_{U_{rs}}$ ogni volta che $U_r \cap U_s \neq \varnothing$.

Esercizio. Si deduca da ciò che una sottovarietà complessa di una varietà Kähleriana è ancora Kähleriana (Sugg.: se $\varrho \in C^\infty(M)$ è una funzione strettamente plurisubarmonica, allora lo è anche $\iota^*\varrho$ per $\iota\colon N \hookrightarrow M$).

Esempio 3.2. *Esiste un'altra forma di Kähler su* $\mathbf{C}^n$ *ottenibile da un potenziale globale, diversa da quella canonica: consideriamo la funzione* $\varrho(z) = \log(|z|^2 + 1)$ *su* $\mathbf{C}^n$*: si verifica che*

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} = -\frac{\overline{z}_j z_k}{(|z|^2+1)^2} + \frac{\delta_{jk}}{|z|^2+1} \tag{60}$$

e che quindi ϱ *è strettamente plurisubarmonica (si usino considerazioni di simmetria legate al fatto che* $U(n)$ *agisce transitivamente su* $\mathbf{C}^n \setminus \{0\} \overset{ht}{\cong} \mathbb{S}^{2n-1}$*, e che quindi è sufficiente verificare che* h_{jk} *è definita positiva in una sola direzione). Tale forma di Kähler si dice* forma di Fubini-Study.

La forma di Kähler di Fubini-Study è, per $n = 1$

$$\omega_{FS} = \frac{i}{2}\partial\overline{\partial}\varrho = \frac{\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z}}{\left(|z|^2+1\right)^2} \tag{61}$$

Una facile generalizzazione si ha per il generico $\mathbf{C}^n$*, usando anche la formula precedentemente trovata per gli* h_{jk}*.*

A Complementi.

A.1 Generalità sui fibrati.

A.2 Definizioni e prime Proprietà.

Nel seguito B è uno spazio topologico, detto *spazio di base*.

Definizione A.1 [Fibrato Vettoriale]**:** *Un* fibrato vettoriale reale ξ *su* B *consiste nei dati seguenti:*

- *Uno spazio topologico* E *detto* spazio totale*;*
- *Una mappa continua e suriettiva* $\pi\colon E \to B$ *detta* proiezione*;*
- *Una struttura di* $\mathbf{R}$*-spazio vettoriale su ciascuna delle fibre* $\pi^{\leftarrow}(\{b\}) = F_b$*.*

Tali dati devono soddisfare la seguente condizione di trivializzazione locale*:*

> *Per ogni $b \in B$ esistono un intorno $U \subseteq B$ e un omeomorfismo*
>
> $$h_b \colon U \times F_b \cong \pi^{\leftarrow}(U) \tag{62}$$
>
> *tali che il diagramma sotto sia commutativo.*
>
> $$\begin{tikzcd} \pi^{\leftarrow}(U) \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "\pi"'] & U \times F_b \arrow[d, "proj_1"] \\ & U \end{tikzcd} \tag{63}$$

U ed F_b hanno la topologia di sottospazio e $U \times F_b$ la prodotto. Grazie ad h resta definito un isomorfismo tra $\mathbf{R}^\kappa$ (ove $\kappa = \dim_{\mathbf{R}} F_b$) e F_b stesso mediante la corrispondenza $\underline{x} \mapsto h(b, \underline{x})$.

Una coppia (h, U) come sopra è detta *sistema di coordinate locali*, o *trivializzazione locale* per il fibrato ξ. Se si può scegliere $U = E$, il fibrato ξ è detto *triviale* su B.

Lo spazio vettoriale F_b è detto *fibra* di ξ sopra E. Se c'è pericolo di confusione si denota $F_b(\xi)$.

Per l'ipotesi di suriettività fatta, $F_b \neq \varnothing$ per ogni $b \in B$. La *dimensione* di F_b (che supponiamo ora e sempre finita) è una funzione continua $B \to \mathbf{N}$ (con la topologia discreta sul secondo), che deve perciò essere localmente costante.

A.2.1 Alcuni Esempi.

Esempio A.1 (Fibrato Banale)**.** *Il* fibrato banale *ϵ_B con spazio totale $E = B \times \mathbf{R}^n$ ha la mappa di proiezione $\pi \colon E \to B \colon (b, \underline{x}) \mapsto b$*

Osservazione 8. Un fibrato è triviale se e solo se è isomorfo a ϵ_B.

Esempio A.2 (Fibrato Tangente)**.** *Il* fibrato tangente *τ_M ad una varietà liscia M di dimensione n è un fibrato liscio (con un argomento classico si riesce a dotare TM di una struttura di varietà liscia).*

Lo spazio totale è la varietà $TM = \coprod_{p \in M} T_pM$, ovvero fatta dalle coppie $(p, \underline{v})$, dove $p \in M$ e $\underline{v} \in T_pM$ è un vettore tangente a M in p.

La proiezione è definita da $(p, \underline{v}) \mapsto p$, di modo che $\pi^{\leftarrow}(p) = T_pM$, ed in effetti $TM = \coprod_{p \in M} T_pM$. La condizione di trivialità locale è semplice da verificare: in

$$\begin{tikzcd} \coprod_{p \in U} T_pM \arrow[r, "h"] \arrow[d] & U \times \mathbf{R}^n \arrow[dl, "proj"] \\ U & \end{tikzcd} \tag{64}$$

la mappa h è definita come $(p, \underline{v}) \mapsto (p, \psi(\underline{v}))$, dove $\psi \in GL(\mathbf{R}^n)$ è un qualsiasi isomorfismo lineare che identifica T_pM ed $\mathbf{R}^n$ (per esempio, scelte delle coordinate $x_1, \dots x_n$ date da una carta di M attorno a p, e vedendo T_pM come spazio di derivazioni, ψ manda $\frac{\partial}{\partial x^i}$ in $\underline{e}_i$ -base canonica-).

Osservazione 9. In modo analogo si definisce il fibrato *cotangente* ad M, con spazio totale fatto dall'unione disgiunta $\coprod_{p \in M} T_p^* M = \coprod_{p \in M} (T_p M)^*$

Esempio A.3 (Fibrato Normale)**.** *Se M è una varietà liscia di dimensione n, immersa in $\mathbf{R}^N$ per qualche $N > n$, lo spazio totale del* fibrato normale *si ottiene dall'unione disgiunta $NM = \coprod_{p \in M} (T_p M)^\perp$ (l'ortogonale è quello indotto dall'usuale prodotto scalare di $\mathbf{R}^N$). La proiezione è $\pi \colon NM \to M \colon (p, \alpha) \mapsto p$, in modo che $\pi^{\leftarrow}(p) = (T_p M)^\perp$.*

A.3 Funzioni di Transizione.

Sia ξ un fibrato su B di proiezione $\pi \colon E \to B$. Gli aperti banalizzanti formano un ricoprimento di B, che indichiamo con $\{U_i\}$. In corrispondenza di due trivializzazioni locali $h_i \colon \pi^{\leftarrow}(U_i) \cong U_i \times \mathbf{R}^n$ e $h_j \colon \pi^{\leftarrow}(U_j) \cong U_j \times \mathbf{R}^n$, si ottiene, per restrizione all'intersezione $U_{ij} := U_i \cap U_j$, un isomorfismo h_{ij}, definito da

$$\begin{aligned} h_i \circ h_j^{-1} \colon U_{ij} \times \mathbf{R}^n &\longrightarrow U_{ij} \times \mathbf{R}^n \\ (x, \underline{v}) &\longmapsto (x, g_{ij}(x)\underline{v}), \end{aligned} \tag{65}$$

dove $g_{ij} \colon U_{ij} \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ è una mappa continua (o liscia se B è una varietà). Le funzioni g_{ij} sono dette funzioni di transizione per E. Esse soddisfano le identità (dette *condizioni di cociclo*)

$$g_{ij}(x) g_{ji}(x) = \mathrm{id}_{U_{ij} \times \mathbf{R}^n} \text{ per ogni } x \in U_{ij}$$
$$g_{ik}(x) = g_{ij}(x) g_{jk}(x) \text{ per ogni } x \in U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$$

Dimostrazione. Entrambe le identità sono conseguenza del fatto che g_{ij} è l'unica mappa tale che $h_{ij} = \mathrm{id}_{U_{ij}} \times g_{ij}$. La prima segue dal fatto che $h_{ij} \circ h_{ji} = h_i \circ h_j^{-1} \circ h_j \circ h_i^{-1} = \mathrm{id}_{U_{ij} \times \mathbf{R}^n}$, dunque $g_{ij}(x) g_{ji}(x) \underline{v} = \underline{v}$ per ogni $\underline{v} \in \mathbf{R}^n$, che implica quanto affermato.

La seconda segue dal fatto che $\mathrm{id}_{U_{ik}} \times g_{ik} = h_{ik} = h_i \circ h_k^{-1} = h_i \circ h_j^{-1} \circ h_j \circ h_k^{-1} = (\mathrm{id}_{U_{ij}} \times g_{ij}) \circ (\mathrm{id}_{U_{jk}} \times g_{jk}) = \mathrm{id}_{U_{ik}} \times (g_{ij} \circ g_{jk})$, per ogni $x \in U_{ijk}$, e per l'unicità di cui sopra si conclude. □

Le funzioni di transizione di un fibrato lo caratterizzano univocamente, nel senso che se viene dato un ricoprimento aperto dello spazio di base, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ ed una famiglia di mappe continue $g_{ij} \colon U_{ij} \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ che soddisfano le condizioni di cociclo, esiste un unico fibrato vettoriale di dimensione n che ammette le g_{ij} come funzioni di transizione. Esso è costruito prendendo per spazio totale E l'unione disgiunta

$$\coprod_{i \in I} \left(U_i \times \mathbf{R}^n \right) \tag{66}$$

quozientata per la relazione di equivalenza generata dall'identificazione $(x, \underline{v}) \sim (y, \underline{v}')$ se e solo se $x = y$ e $\underline{v}' = g_{ij}(x)\underline{v}$.

Se su E c'è la topologia quoziente, $\pi \colon E \to B$ è una mappa continua e suriettiva. Le trivializzazioni locali $h_i \colon \pi^{\leftarrow}(U_i) \cong U_i \times \mathbf{R}^n$ sono definite da $h_i^{-1}(x, \underline{v}) = [(x, \underline{v})]$ (la classe nel quoziente).

Questo ultimo risultato mostra che un fibrato si può caratterizzare, equivalentemente, mediante una famiglia di trivializzazioni locali o mediante le sue funzioni di transizione.

Osservazione 10. Se stiamo considerando fibrati lisci, la struttura di varietà su E è indotta proprio dalle trivializzazioni h_i; bisogna verificare che le strutture di varietà ottenute a partire da $U_i \times \mathbf{R}^n$ e $U_j \times \mathbf{R}^n$ coincidono su U_{ij}. Allo stesso modo su $\pi^{\leftarrow}(\{b\})$ viene indotta una struttura di spazio vettoriale a partire da quella, ovvia, di $\mathbf{R}^n$. Ancora, questa struttura non dipende da $i \in I$.

A.4 Operazioni sui Fibrati.

Si può affermare, in linea generale, che le costruzioni universali tra spazi vettoriali ne inducono di analoghe tra fibrati che hanno quegli spazi vettoriali per fibre. Quelli che seguono sono degli esempi di quanto appena detto.

A.4.1 Somma di Whitney.

Dati due fibrati ξ_1, ξ_2 di proiezioni $\pi_1 \colon E_1 \to B, \pi_2 \colon E_2 \to B$, la *somma di Whitney* di ξ_1 e ξ_2 è il fibrato $\xi_1 \oplus \xi_2$ che ha per fibra sopra b la somma diretta delle fibre $F_b(\xi_1) \oplus F_b(\xi_2)$, e spazio totale l'unione disgiunta $\coprod_{b \in B} F_b(\xi_1) \oplus F_b(\xi_2)$ di tutte queste fibre, con l'ovvia proiezione definita da $\pi_\oplus(b, \underline{v} + \underline{w}) = b$.

A partire da trivializzazioni locali

$$\begin{aligned} h_i \colon \pi_1^{\leftarrow}(U_i) &\cong U_i \times \mathbf{R}^n \\ k_i \colon \pi_2^{\leftarrow}(U_i) &\cong U_i \times \mathbf{R}^m \end{aligned}$$

su uno stesso aperto U_i otteniamo biiezioni $\sigma^{\leftarrow}(U_i) \cong U_i \times (\mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}^m)$; le funzioni di transizione di questo fibrato sono le mappe

$$\begin{aligned} U_{ij} &\longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}^m) \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} g^1_{ij}(x) & 0 \\ 0 & g^2_{ij}(x) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{67}$$

g^1_{ij} e g^2_{ij} essendo le funzioni di transizione di ξ_1 e ξ_2 rispettivamente.

Equivalentemente, definiamo la mappa diagonale relativa allo spazio di base

$$\begin{aligned} d \colon B &\longrightarrow B \times B \\ b &\longmapsto (b, b) \end{aligned} \tag{68}$$

e il fibrato $\xi_1 \oplus \xi_2 = d^*(\xi_1 \times \xi_2)$; ogni fibra $F_b(\xi_1 \oplus \xi_2)$ è canonicamente isomorfa alla somma diretta $F_b(\xi_1) \oplus F_b(\xi_2)$, in quanto spazio vettoriale isomorfo a $F_b(\xi_1) \times F_b(\xi_2)$.

A.4.2 Duale, Tensore, Potenza Esterna e Simmetrica.

Dovrebbe apparire chiaro a questo punto che la regola operativa da seguire è che *operazioni sugli spazi vettoriali ne inducono, di analoghe, tra i fibrati vettoriali che hanno quegli spazi per fibre*; il modo più comodo di definire tali fibrati è attraverso le funzioni di transizione, dato che esse sono determinate, in ultima analisi, da mappe lineari $U \to \mathrm{GL}(F(\xi))$

(si pensi per esempio ad una varietà liscia M, le mappe di transizione del suo fibrato tangente -su una sua trivializzazione locale- sono delle $g_{ij}(x) \in \mathrm{GL}(T_xM)$); in questo senso possiamo definire

- Il *fibrato duale* di un fibrato $\xi\colon E \to B$, denotato $\xi^*\colon E^* \to B$ e definito dalle transizioni
$$g^\dagger_{ij}(x) = g_{ij}^{-\mathrm{t}}(x) \in \mathrm{GL}(\mathbf{R}^n) \tag{69}$$
(identificato a $\mathrm{GL}\big((\mathbf{R}^n)^*\big)$ grazie all'isomorfismo canonico);
- Il fibrato *prodotto tensoriale* di $E \to B \leftarrow E'$ (rispettivamente di dimensione n ed m), denotato $\xi \otimes \xi'\colon E \otimes E' \to B$ e definito dalle transizioni
$$k_{ij} = g_{ij}(x) \otimes g'_{ij}(x) \in \mathrm{GL}(\mathbf{R}^n \otimes \mathbf{R}^m) \cong \mathrm{GL}(\mathbf{R}^{nm}); \tag{70}$$
- Il fibrato *potenza esterna* di $\xi\colon E \to B$, denotato $\bigwedge^k \xi\colon \bigwedge^k E \to B$, e quello *potenza simmetrica*, denotato $\bigodot \xi\colon \bigodot E \to B$, definiti rispettivamente dalle transizioni
$$\begin{aligned} w_{ij}(x) &= \textstyle\bigodot g_{ij}(x) \in \mathrm{GL}(\bigodot \mathbf{R}^n) \\ z_{ij}(x) &= \textstyle\bigwedge^k (g_{ij})(x) \in \mathrm{GL}(\bigwedge^k \mathbf{R}^n). \end{aligned}$$

Se $\xi\colon E \to B$ è un fibrato di dimensione n, $\bigwedge^n \xi$ è sempre un fibrato in rette, chiamato *fibrato determinante* di ξ, ed è definito dalle transizioni $k_{ij}(x) = \det g_{ij}(x)$; si indica con $\det \xi$.

Esercizio. Si dimostri che valgono i seguenti isomorfismi, per tre fibrati ξ, η, ϑ.
$$\begin{gathered} (\xi \oplus \eta) \oplus \vartheta \cong \xi \oplus (\eta \oplus \vartheta) \qquad \xi \oplus \eta \cong \eta \oplus \xi \\ (\xi \otimes \eta) \otimes \vartheta \cong \xi \otimes (\eta \otimes \vartheta) \qquad \xi \otimes \eta \cong \eta \otimes \xi \\ (\xi \oplus \eta)^* \cong \xi^* \oplus \eta^* \qquad (\xi \otimes \eta)^* \cong \xi^* \otimes \eta^* \\ \textstyle\bigwedge^k \xi^* \cong \big(\bigwedge^k \xi\big)^* \qquad \bigwedge^{n-k} \xi \cong \bigwedge^k \xi \end{gathered}$$

Se ξ e ξ' sono due fibrati vettoriali su una stessa base B, si è già detto che un omomorfismo di fibrati è determinato da una mappa continua f tra gli spazi totali che si restringe ad una mappa lineare sulle fibre. Se (U, h), (U', h') sono due trivializzazioni locali, la mappa $\widetilde{f}$ ottenuta dalla commutatività di
$$\begin{tikzcd} U \times \mathbf{R}^n \arrow[r] \arrow[d, dash] & U' \times \mathbf{R}^m \arrow[d, dash] \\ \pi^{\leftarrow}(U) & (\pi')^{\leftarrow}(U') \end{tikzcd} \tag{71}$$
si dice *espressione locale* di f nelle trivializzazioni scelte. Essa è della forma $(x, \underline{v}) \mapsto (x, G(x)\underline{v})$, ove $G\colon U \to \hom_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ è una mappa sufficientemente regolare (nella topologia ovvia di $\hom_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$).

Un esempio educativo: $T^r_s(M)$**.** La sezione A.4.2 non ha raccontato la storia per intero, e $\bigwedge\xi, \bigodot\xi$ sono esempi di una costruzione più generale.

Ripercorriamo rapidamente la costruzione (universale) che ad uno spazio vettoriale V di dimensione finita associa l'*algebra tensoriale* (controvariante) su V: essa consiste della somma diretta

$$T_*(V) = \bigoplus_{n\geq 0} V^{\otimes n} \tag{72}$$

$V^{\otimes n}$ indicando lo spazio $V\otimes\cdots\otimes V$ fatto n volte. $T_*(V)$ gode della proprietà di rialzare ogni applicazione lineare $\varphi\colon V \to A$, ove A è una k-algebra, ad una applicazione $T_*(f)$ di k-algebre; se una base di V è data da $\underline{e}_1, \dots \underline{e}_d$, una base di $V^{\otimes n}$ è fatta dai d^n simboli formali $\underline{e}_{\otimes I} = \underline{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\underline{e}_{i_n}$, dove $1\leq i_1,\dots,i_n\leq d$.

Una analoga costruzione dà l'algebra tensoriale *contro*variante su V, $T^*(V) = \bigoplus_{n\geq 0}(V^*)^{\otimes n}$: l'algebra tensoriale *totale* si ottiene, generalizzando un altro po', dalla somma diretta degli spazi $T^n_m(V) = V^{\otimes m}\otimes(V^*)^{\otimes n}$:

$$T(V) = \bigoplus_{m,n\geq 0} V^{\otimes m}\otimes(V^*)^{\otimes n}. \tag{73}$$

Esercizio. Trovare una base per $T^n_m(V)$.

Ci occupiamo ora dello studio di fibrati *tensoriali* (di grado (r,s)) ottenuti da un fibrato dato; richiamiamo prima qualche risultato che discende dalla funtorialità della assegnazione $V \rightsquigarrow T_*(V), T^*(V)$.

Definizione A.2 : *Supponiamo che $f\colon E\to E'$ sia un omomorfismo di fibrati su B, e che $\widetilde{f}\colon U\times F_b(\xi)\to U'\times F_b(\xi')$ sia la sua rappresentazione locale. Supponiamo che $f|_{\{x\}\times F_x} =: f_x$ sia un isomorfismo tra le fibre, per ogni $x\in U$, e denotiamo con f_0 la restrizione di f alla zero-sezione del fibrato ξ.*

Definiamo una applicazione $U\times T^r_s(F_b(\xi))\to U'\times T^r_s(F_b(\xi'))$ come

$$(x,t)\longmapsto \big(f_0(x), T^r_s(f_u).t\big) \tag{74}$$

Tale mappa, da indicarsi semplicemente $T^r_s(f)$, si incolla ad una mappa tra opportuni spazi totali su B, in modo da divenire un omomorfismo di fibrati. Scopo del resto di questa sezione è definire tali spazi totali.

Proposizione A.1 : *Se $\widetilde{f}\colon U\times F_b(\xi)\to U'\times F_b(\xi')$ è la rappresentazione locale di un omomorfismo di fibrati $f\colon\xi\to\xi'$, tale che (nelle notazioni sopra esposte) f_u è un isomorfismo lineare, allora $T^r_s(f)\colon U\times T^r_s(F_b(\xi))\to U'\times T^r_s(F_b(\xi'))$ è un isomorfismo per ogni $x\in U$.*

Dimostrazione. È una verifica diretta che diventa un esercizio. Si tratta di stabilire che $T^r_s(f_u) = (T^r_s(f))_u$ è una mappa sufficientemente regolare: questo segue essenzialmente da come è costruita $T^r_s(f_u)$ a partire da f_u. Per mostrare che $T^r_s(f)$ preserva le fibre, si può mostrare che il diagramma

$$\begin{tikzcd} U \times T^r_s(F_b(\xi)) \arrow[r, "T^r_s(f)"] \arrow[d, "\pi"'] & U' \times T^r_s(F_b(\xi')) \arrow[d, "\pi'"] \\ U \arrow[r, "f_0"'] & U' \end{tikzcd} \tag{75}$$

è commutativo. □

Definizione A.3 [Fibrato tensoriale di ξ]**:** *Sia $\pi\colon E \to B$ la proiezione di un fibrato ξ. Denotiamo come al solito $F_b(\xi) = \pi^{\leftarrow}(b)$ per ogni $b \in B$. Definiamo*

$$T^r_s(E) := \coprod_{b \in B} T^r_s(F_b(\xi)) \tag{76}$$

e $\pi^r_s\colon T^r_s(E) \to B\colon (\underline{e}, b) \mapsto b$ nel modo ovvio, per ogni $\underline{e} \in T^r_s(F_b(\xi))$. Allo stesso modo, se $A \subseteq B$, definiamo $T^r_s(E)|_A := \coprod_{b\in A} T^r_s(F_b(\xi))$. Se $\pi'\colon E' \to B$ è la proiezione di un altro fibrato ξ', ed $f\colon E \to E'$ è un omomorfismo di fibrati che è isomorfismo sulle fibre (ossia $f^b = f|_{F_b(\xi)}$ è un isomorfismo), definitamo $T^r_s(f)\colon T^r_s(E) \to T^r_s(E')$ con la posizione $T^r_s(f)|_{T^r_s(F_b(\xi))} = T^r_s(f^b)$.

Se $\{U_i\}$ è un ricoprimento di aperti trivializzanti di B, allora $\{\pi^{\leftarrow}(U_i)\}$ è un ricoprimento dello spazio totale, e ciascun $\pi^{\leftarrow}(U_i)\}$ è omeomorfo mediante le trivializzazioni locali a $U_i \times F$ (la fibra senza pedice è la generica fibra sopra $b \in B$). Da ciò segue che $\{(\pi^r_s)^{\leftarrow}(U_i)\}$ricopre lo spazio totale di $T^r_s(\xi)$ e che restano indotte (il consiglio per esplicitarle è di cercare le funzioni di transizione) delle trivializzazioni locali $h_i\colon (\pi^r_s)^{\leftarrow}(U_i) \cong U_i \times T^r_s(F(\xi))$.

Queste coordinate locali sono chiamate coordinate “naturali” su $T^r_s(\xi)$. Se lo spazio totale di ξ era una varietà, si dimostri che lo è anche lo spazio totale di $T^r_s(\xi)$, e che le coordinate naturali sono un atlante per questa struttura di varietà.

In effetti tutto questo si può specializzare (e acquista senso nel momento in cui questo viene fatto) al caso in cui $\xi = \tau_M$ è il fibrato tangente a una varietà liscia.

Definizione A.4 : *Sia M una varietà liscia e τ_M il suo fibrato tangente. Il* fibrato dei tensori di tipo (s, r) su M *è definito da $T^r_s(M) = T^r_s(\tau_M)$.*

Il fibrato tangente τ_M si identifica con $T^1_0(M)$, e il cotangente a $T^0_1(M)$ (oltre che al fibrato duale τ^*_M).

Campi di Tensori. Si ricordi che una sezione di un fibrato vettoriale ξ è una mappa $s\colon U \to E$ sufficientemente regolare definita su $U \subseteq B$, che manda ogni $b \in U$ in un vettore $\underline{v} \in F_b(\xi)$ nella fibra sopra b, e che è una sezione della proiezione di ξ. Le sezioni di ξ sono raccolte nell'insieme $\Gamma(U, \xi)$. L'assegnazione $U \mapsto \Gamma(U, \xi)$ è un *fascio* di $\mathbf{R}$-moduli.

Si noti che un campo vettoriale su $U \subseteq M$, nelle notazioni appena introdotte, è un elemento di $\Gamma(U, \tau_M) = \Gamma(U, T^1_0(M))$ e una forma differenziale è un elemento di $\Gamma(U, \tau^*(M)) = \Gamma(U, T^0_1(M))$.

Questo fatto ne nasconde uno estremamente più generale.

Definizione A.5 : *Un* campo di tensori di tipo (s, r) *su una varietà liscia* M *è una sezione liscia del fibrato* $T^r_s(M)$*. Denotiamo con* $\mathfrak{T}^r_s(M)$ *l'insieme* $\Gamma(U, T^r_s(M))$*, riferendosi ad esso come dotato implicitamente della struttura di spazio vettoriale reale.*

Pressoché tutte le definizioni si possono dare senza troppo sforzo. Se $f \in C^\infty(M)$, $t \in \mathfrak{T}^r_s(M)$, definiamo $f \cdot t \colon M \to T^r_s(M) \colon p \mapsto f(p)t(p)$ (questo rende $\mathfrak{T}^r_s(M)$ un C^∞-modulo).

Se $X_1, \dots, X_s$ sono campi vettoriali su M, $\alpha_1, \dots \alpha_r$ sono forme differenziali, e $t' \in \mathfrak{T}^{r'}_{s'}(M)$, definiamo

$$\begin{aligned} t(\underline{\alpha}, \underline{X}) \colon M &\longrightarrow \mathbf{R} \\ p &\longmapsto t(p)(\underline{\alpha}(p), \underline{X}(p)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t \otimes t' \colon M &\longrightarrow T^{s+s'}_{r+r'}(M) \\ p &\longmapsto t(p) \otimes t'(p). \end{aligned}$$

Vale ovviamente un risultato che riguarda la

Rappresentazione in Coordinate di un Campo Tensoriale. Se $\varphi \colon U \to \mathbf{R}$ è una carta locale di M, $T\varphi^{-1}(\underline{e}_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}$ è una base dello spazio tangente visto come spazio di derivazioni; la base duale sullo spazio cotangente è fatta da $\mathrm{d}x_i \colon \mathrm{d}x_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_{ij}$.

L'espressione in coordinate locali di un campo tensoriale t di tipo (s, r) su M è allora data da

$$T|_U = t^{i_1, \dots, i_r}_{j_1, \dots, j_s} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_s}} \otimes \mathrm{d}x^{i_1} \otimes \dots \otimes \mathrm{d}x^{i_r} \tag{77}$$

dove $t^{i_1, \dots, i_r}_{j_1, \dots, j_s} = t\big(\mathrm{d}x^{i_1}, \dots, \mathrm{d}x^{i_r}, \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\big) \in C^\infty(M)$.

A.5 Teorema di Newlander-Nirenberg.

Scopo di questa sezione è mostrare che se M ha una struttura di varietà quasi complessa compatibile con una struttura complessa, allora il tensore ν di Nijenhuis è nullo.

Ricordiamo a tale scopo che una base dello spazio tangente a M in $p \in M$, visto come spazio di derivazioni, è data da $\big\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_N}\big|_p \big\}$ dove $(x_1, \dots, x_N)$ sono coordinate locali nell'intorno di p. Ricordiamo altresì che la dimensione di M deve essere pari, e quindi possiamo scrivere $N = 2n$, e che la struttura quasi complessa J è definita sulla base $\frac{\partial}{\partial x_k}\big|_p$ come $J\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\big|_p\right) = \frac{\partial}{\partial x_{n+k}}\big|_p$ e $J\left(\frac{\partial}{\partial x_{n+k}}\big|_p\right) = -\frac{\partial}{\partial x_k}\big|_p$ per ogni $k = 1, \dots, n$.

Infine, il commutatore di due campi vettoriali $\underline{X} = \sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\underline{Y} = \sum Y_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ è definito come il campo vettoriale

$$[\underline{X}, \underline{Y}] = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{78}$$

L'ultima osservazione da fare è che è sufficiente verificare la relazione sui campi vettoriali del tipo $X\frac{\partial}{\partial x_i}$ (con X funzione liscia), grazie alla linearità del commutatore. Siano allora $\underline{X} = X\frac{\partial}{\partial x_i}, \underline{Y} = Y\frac{\partial}{\partial x_j}$ due campi vettoriali, e supponendo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ calcoliamo

$$\begin{aligned}
[J\underline{X}, J\underline{Y}] &= X\frac{\partial Y}{\partial x_{n+i}}\frac{\partial}{\partial x_{n+j}} - Y\frac{\partial X}{\partial x_{n+j}}\frac{\partial}{\partial x_{n+i}}; \\
J\,[J\underline{X}, \underline{Y}] &= Y\frac{\partial X}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} + X\frac{\partial Y}{\partial x_{n+i}}\frac{\partial}{\partial x_{n+j}} \\
J\,[\underline{X}, J\underline{Y}] &= -X\frac{\partial Y}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} - Y\frac{\partial X}{\partial x_{n+j}}\frac{\partial}{\partial x_{n+i}} \\
[\underline{X}, \underline{Y}] &= X\frac{\partial Y}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} - Y\frac{\partial X}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}
\end{aligned}$$

Ora basta sommare gli ultimi tre termini per constatare che $[JX, JY] = J[X, JY] + J[JX, Y] + [X, Y]$.

Un procedimento analogo permette di dimostrare la tesi nei casi restanti (per esempio quando $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $j \in \{n+1, \ldots, 2n\}$). $\square$

Riferimenti bibliografici

[An1] D. Angella, *Varietà simplettiche speciali e loro coomologia*, tesi.

[ACS] Ana Cannas da Silva, *Lectures on Symplectic Geometry*, Lecture Notes in Mathematics 1764, Springer-Verlag, 2008.

[Bot] F. Bottacin, *Fibrati Vettoriali sulle Curve*
`http://www.math.unipd.it/~bottacin/books/fibrati.pdf`

[MiS] John W. Milnor, James D. Stasheff, *Characteristic Classes*, Annals of Mathematics Studies 76, Princeton University Press (1974).

[Ste] Norman Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press (1951).