Monoidal Categories
for the Working Physicist

23 giugno 2012

Idea: Un diagramma di Feynman si comporta come un cobordismo, che serve allo studio delle TQFT, che sono manifestazioni topologiche dei tensori e servono a calcolare invarianti algebrici di varietà, e infine sono un modello per l'evoluzione di stringhe nello "spaziotempo"…

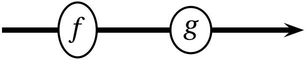
Che confusione! Tutto parte da una sola definizione: quella di

Categoria Monoidale

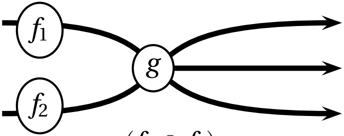
- Cos'è un prodotto tensoriale?
- Cos'è la notazione di Penrose per i tensori?
- Cos'è una (Topological) Quantum Field Theory?
- Cos'è un diagramma di Feynman?
- …ad libitum

Proprietà categoriali assenti o presenti in **Hilb** (o in categorie simili) rispecchiano teoremi noti ai fisici:

- La nozione stessa di cat. monoidale permette di modellare l'idea di "un grado di libertà in più" nella composizione di morfismi:



$f \circ g$



$(f_1 \otimes f_2) \circ g$

- Teorema di no-cloning/no-deleting (Wootters-Zurek, 1982): Non esiste un operatore unitario $U : |E\rangle \otimes |\phi\rangle \mapsto |E'\rangle \otimes |\phi\rangle \otimes |\phi\rangle$: ciò si traduce nel fatto che **Hilb** non è una categoria monoidale *cartesiana*.
- Esiste un modo di vedere un operatore lineare $f : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ a sua volta come uno stato quantistico, con una procedura detta *gate teleport*: ciò si traduce nel fatto che **Hilb** è una categoria monoidale *chiusa*.

Definizione

Una categoria consiste nel dato di

- *Una collezione di* *oggetti* $X, Y, Z, \dots$ *(insiemi con "struttura", ma non è tassativo);*
- *Una collezione di* *frecce tra oggetti* $f: X \to Y$, $g: Y \to Z, \dots$, *dette anche morfismi,*

legati tra loro da alcuni assiomi che richiamano l'insiemistica:

- *Le frecce si possono* *comporre* *secondo una regola punta-coda* $(X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z) \rightsquigarrow (X \xrightarrow{f \circ g} Z)$, *in modo associativo* $((fg)h = f(gh))$;
- *Ogni oggetto possiede una freccia precisa, detta identità* $1_X: X \to X$, *tale che* $f \circ 1 = f$ *per ogni* $f: A \to X$, *e* $1 \circ g = g$ *per ogni* $g: X \to B$.

Il ruolo delle frecce è trasformare oggetti strutturati in oggetti strutturati allo stesso modo (insiemi in insiemi, gruppi in gruppi, stati di un "sistema" iniziale in stati di un "sistema" finale,...). Trasformazioni successive equivalgono ad un'unica trasformazione che ne è la composizione:

Esempi di categorie:

- **Sets**: la categoria degli insiemi, le frecce sono funzioni $f: X \to Y$. La composizione è la composizione di funzioni, eccetera.
- **Grp**, **Ab**, **Vect**, **Top**: le categorie dei gruppi, dei gruppi abeliani, degli spazi vettoriali complessi, degli spazi topologici. Le frecce sono omomorfismi $f: G \to H$ (di gruppo, o applicazioni lineari, o funzioni continue), eccetera.
- **Hilb**: la categoria degli spazi di Hilbert complessi. I morfismi sono le isometrie lineari $f: \mathcal{H} \to \mathcal{K}$.
- **Rep**(G): la categoria delle rappresentazioni k-lineari di un gruppo G; le frecce sono omomorfismi lineari $T: V \to W$ equivarianti: $g.(T(v)) = T(g.v)$ per ogni $g \in G$, $v \in V$
- n**Cob**, $n \geq 1$: la categoria che ha per oggetti varietà chiuse, differenziabili e orientate, di dimensione $n-1$ e per morfismi varietà di dimensione n che hanno gli oggetti per bordo. Si chiamano cobordismi.

Witten-Atiyah-Lurie: Esiste un "modo" di associare ad ogni $X \in n\mathbf{Cob}$ uno spazio di Hilbert, e ad ogni freccia in n**Cob** un'isometria lineare. Si chiama (Topological)QFT.

Questo “modo” si chiama funtore: anche una categoria è un oggetto dotato di una qualche struttura, ed esistono delle trasformazioni che la preservano!

Definizione

Date due categorie $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ *una freccia* F *tra categorie si dice funtore. Si tratta di una coppia di corrispondenze* F_o, F_a

- *Sugli oggetti: ad ogni* $C \in \mathbf{C}$ *viene associato un oggetto* $F_o(C) \in \mathbf{D}$*;*
- *Sulle frecce: ad ogni freccia* $f\colon C \to C'$ *in* $\mathbf{C}$ *viene associata una freccia* $F_a(f)\colon F_o(C) \to F_o(C')$ *in* $\mathbf{D}$*;*

in modo tale che la composizione di frecce sia rispettata:

$$F_a(f \circ g) = F_a(f) \circ F_a(g)$$

e che l'immagine di ogni freccia identica $1_C\colon C \to C$ *mediante* F_a *sia* $1_{F_o(C)}$.

Per brevità un funtore si indica con

$$F\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$$

Un funtore rappresenta oggetti e morfismi di una categoria come oggetti e morfismi di un'altra...

- ...Nello stesso senso in cui una rappresentazione di un gruppo G mostra G come un gruppo di permutazioni su un insieme: una rappresentazione è un funtore $G \to \mathbf{Hilb}$; un'azione di gruppo un funtore $G \to \mathbf{Sets}$;
- ...Associando ad oggetti "complicati" (per lo più spazi topologici) oggetti algebrici che li classifichino a meno di isomorfismo:

$$\{\text{oggetti geometrici}\} \rightleftarrows \{\text{oggetti algebrici}\}$$

  $X \in \mathbf{Top} \rightsquigarrow H_n(X, \mathbb{R}), H^n(X, \mathbb{R}), \pi_n(X, *), \mathrm{Sh}(X), \dots$ Se X, Y sono omeomorfi hanno gli stessi invarianti algebrici; il viceversa in generale non è mai vero, ma dà un criterio per stabilire se due spazi *non* sono omeomorfi.
- ...sfruttando il fatto che spesso "sappiamo" l'Algebra, e quasi mai la Geometria: i funtori "traducono" teorie matematiche complesse, semplificandole.

In Fisica, spesso si è portati a considerare sistemi che sono la *giunzione* di sottosistemi più semplici, non interagenti, che evolvono in parallelo ($\mathcal{H} \cong \mathcal{H}_\mathrm{r} \otimes \mathcal{H}_\mathrm{s}$). Il concetto di categoria monoidale sussume quest'idea in un'unica definizione: si tratta di una categoria dove possiamo "moltiplicare in modo monoidale" gli oggetti.

Definizione (Categoria Monoidale)

Una categoria monoidale è una terna $(\mathbf{C}, \otimes, I)$*, in cui*

- $\mathbf{C}$ *è una categoria;*
- $\otimes \colon \mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ *è un funtore (il prodotto tensoriale di* $\mathbf{C}$*);*
- $I \in \mathbf{C}$ *è un oggetto, che fa da identità per* $\otimes$*,*

e i seguenti diagrammi sono commutativi

$$
\begin{tikzcd}
(A, B, C) \arrow[r] \arrow[d] & (A \otimes B, C) \arrow[d] \\
(A, B \otimes C) \arrow[r] & A \otimes B \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(A, I) \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes I \arrow[d] \\
I \otimes A \arrow[r] & A
\end{tikzcd}
$$

Alcune sottigliezze

- Scegliamo una volta per tutte un isomorfismo associatore tale che $a_{ABC}\colon (A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C)$ in modo da rendere $\otimes$ una “operazione associativa”.
- Scegliamo una volta per tutte degli isomorfismi unitali $r_A\colon A \otimes I \cong A$, $l_A\colon I \otimes A \cong A$ in modo da rendere I un “elemento neutro” per $\otimes$.
- Imponiamo (assioma pentagonale) che il diagramma

$$\begin{tikzcd}
((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z \arrow[r] \arrow[d] & (W \otimes (X \otimes Y)) \otimes Z \arrow[r] & W \otimes ((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[d] \\
(W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) \arrow[rr] & & W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z))
\end{tikzcd}$$

  sia commutativo.
- Ad ogni coppia di frecce $f\colon A \to B$, $g\colon C \to D$ risulta associata una freccia $f \otimes g\colon A \otimes C \to B \otimes D$; vale la relazione $(f \otimes f') \circ (g \otimes g') = (f \circ g) \otimes (f' \circ g')$ (argomento di Eckmann-Hilton)

L'esempio archetipico di categoria monoidale è la categoria $\mathbf{Vect}_k$ dei k-spazi vettoriali, con l'operazione $\otimes_k$ di prodotto tensoriale di spazi, e dove $I = k$. Il prodotto tensoriale è spesso "commutativo": definiamo $\sigma_{VW} \colon V \otimes W \to W \otimes V$; questo è palesemente un isomorfismo realizzato come l'estensione per k-linearità di $v \otimes w \mapsto w \otimes v$. È chiaro che per ogni terna di spazi vettoriali si ha

$$\begin{aligned} \sigma_{U,V\otimes W} &= (1_V \otimes \sigma_{UW}) \circ (\sigma_{UV} \otimes 1_W) \\ \sigma_{U\otimes V,W} &= (\sigma_{UW} \otimes 1_V) \circ (1_U \otimes \sigma_{VW}) \end{aligned}$$

(queste si dicono *relazioni di braiding*).

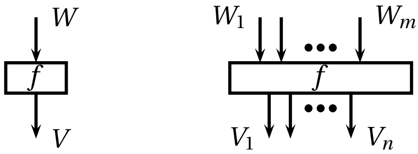
Una categoria monoidale con una famiglia di isomorfismi $\sigma_{VW} \colon V \otimes W \to W \otimes V$, uno per ogni coppia di oggetti, che soddisfa le relazioni di braiding si dice categoria monoidale intrecciata

- In una categoria monoidale intrecciata l'intrecciamento σ_{VW} soddisfa l'*equazione di Yang-Baxter*:

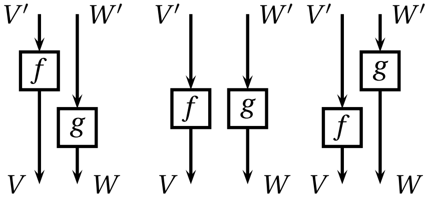
$$\begin{aligned} &(1_W \otimes \sigma_{UV}) \circ (\sigma_{UW} \otimes 1_V) \circ (1_U \otimes \sigma_{VW}) = \\ &= (\sigma_{VW} \otimes 1_U) \circ (1_V \otimes \sigma_{UW}) \circ (\sigma_{UV} \otimes 1_W). \end{aligned}$$

L'algebra sta diventando *un po' troppo* difficile. . . Se è vero che "Algebra $\leftrightsquigarrow$ Geometria", cosa sono le operazioni che abbiamo appena definito?

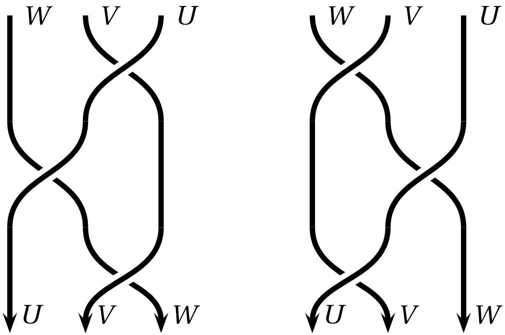
- Una freccia $f\colon V \to W$ (o pù generalmente $f\colon V_1 \otimes \cdots \otimes V_m \to W_1 \otimes \cdots \otimes W_n$) è una scatola etichettata ("colorata") con il nome f, come nelle figure



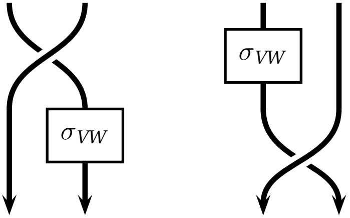
- Il prodotto tensoriale di due frecce è rappresentato dalla giustapposizione in parallelo di cui parlavamo:



Il morfismo di intrecciamento $\sigma_{VW}: V \otimes W \to W \otimes V$ è infine rappresentato geometricamente da un "vero e proprio" intrecciamento del tipo  , e l'equazione di Yang-Baxter assume la forma rappresentata nel diagramma sotto, certamente più intuitiva dal punto di vista visivo.



…si osservi che giustificare l'equazione di Yang-Baxter diventa ancora più semplice alla luce dell'identità



che altro non è che una conseguenza delle relazioni di braiding.

- Nessuna informazione algebrica è andata persa nel processo di conversione geometrica;
- Abbiamo "capito" cosa vuol dire fare un prodotto tensoriale;
- Le relazioni algebriche hanno un corrispettivo topologico (commutare $\sim$ essere omeomorfi)!

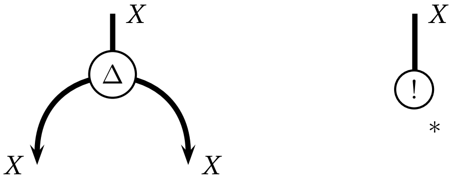
Diciamo che una categoria **C** ammette prodotti binari se possiamo fare il "prodotto cartesiano" di oggetti (soddisfa la proprietà universale di un prodotto): la corrispondenza $(A, B) \mapsto A \times B$ dà a **C** una struttura monoidale (nel caso di **Sets** il prodotto è proprio l'usuale prodotto di insiemi, e $I = \{*\}$ -un qualsiasi insieme con un solo elemento: $A \times \{*\} \cong A$ mediante la biiezione $(a, *) \mapsto a$). In generale

Definizione

Un oggetto terminale in **C** *è un oggetto* $*$ *che ammette una e una sola freccia da ogni altro:* $A \to *$.

Se **C** ha prodotti binari e un oggetto terminale, $(\mathbf{C}, \times, *)$ è monoidale (lungo ma semplice da dimostrare). Una categoria monoidale il cui $\otimes$ è un prodotto cartesiano si dice (con poca fantasia) categoria cartesiana.

Perché ci interessa? In una categoria cartesiana abbiamo frecce di creazione e distruzione di informazione, $\Delta\colon X \to X \times X$, $\nabla\colon X \to *$:



$\Delta\colon x \mapsto (x, x)$ (duplica l'informazione perché raddoppia il numero degli elementi), $\nabla\colon x \mapsto *$ (distrugge l'informazione perché tutto viene mandato nello stesso punto).

Le regole della MQ impediscono che certa informazione venga liberamente duplicata o distrutta: si chiamano teoremi di no-cloning e no-deleting.

- W.K. Wootters and W.H. Zurek, *A Single Quantum Cannot be Cloned*, Nature 299 (1982), pp. 802-803.
- A. K. Pati and S. L. Braunstein, *Impossibility of Deleting an Unknown Quantum State*, Nature 404 (2000), 104.

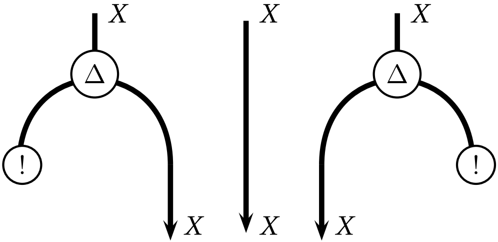
Entrambe le cose discendono dal fatto che **Hilb**, la categoria degli spazi di Hilbert “naturalmente” associata al formalismo quantistico non è una cat. cartesiana.

Dimostrazione.

In una categoria cartesiana ogni freccia $g\colon * \to X \otimes X'$ è della forma $f \otimes f' : * \cong * \otimes * \to X \otimes X'$. Dunque se **Hilb** fosse cartesiana, ogni elemento di $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ sarebbe della forma $h \otimes k$, con $h, k \in \mathcal{H}, \mathcal{K}$. Questo è palesemente falso (esistono combinazioni di stati irriducibili a tensori puri). $\square$

Osservazione (Esercizio?)

In una categoria cartesiana valgono le uguaglianze



In una categoria **C** tutte le frecce tra due oggetti X, Y sono raccolte in un insieme $\mathbf{C}(X, Y)$.

In una categoria chiusa tutte le frecce tra due oggetti sono raccolte in un altro oggetto di **C** (analogia: tutte le applicazioni lineari tra V e W sono a loro volta vettori di uno spazio $\hom_k(V, W)$). Chiamiamo questo oggetto Y^X. Se **C** è una categoria monoidale rispetto a $\otimes$, che è anche chiusa, allora c'è una biiezione tra gli insiemi

$$\mathbf{C}(X \otimes Y, Z) \cong \mathbf{C}(Y, Z^X)$$

- In **Sets** è evidente che $f\colon X \times Y \to Z$ ne induca una $\widetilde{f}\colon X \to \hom(Y, Z)\colon x \mapsto f(x, -)$.
- In **Vect** è altrettanto noto che $f\colon V \otimes W \to U$ ne induce una $\widetilde{f}\colon V \to W^\vee \otimes U (\cong \hom_k(W, U))$.

Un oggetto X in una categoria monoidale $(\mathbf{C}, \otimes, I)$ chiusa si dice compatto se per ogni Y, $Y^X \cong X^\vee \otimes Y$, dove $X^\vee$ è un oggetto analogo al "duale" di X.

Cos'è un "duale" in generale? Diciamo che un oggetto $X \in \mathbf{C}$ è dualizzabile se esiste un altro oggetto $X^\vee$ con due frecce di valutazione e covalutazione

$$e_X \colon X \otimes X^\vee \to I$$
$$c_X \colon I \to X^\vee \otimes X$$

(nel caso di **Vect**, $e_X \colon V \otimes V^\vee \to k \colon x \otimes f \mapsto f(x)$; $c_X \colon k \to V^\vee \otimes V \cong \mathrm{End}(V) \colon 1 \mapsto 1_V$). Valutazione e covalutazione soddisfano le identità *zigzag*

$$(1_V \otimes e_V) \circ (c_V \otimes 1_V) = 1_V$$
$$(e_V \otimes 1_{V^\vee}) \circ (1_{V^\vee} \otimes c_V) = 1_{V^\vee}$$

Se valutazione e covalutazione si rappresentano graficamente come

le identità zigzag sono effettivamente degli *zigzag* (si provi con un disegno).

Una categoria monoidale dove ogni oggetto è compatto si dice compatta: esiste allora un funtore $X \mapsto X^\vee$ che *dualizza* oggetti e morfismi (in **Vect**, $V, f \leftrightsquigarrow V^\vee, f^\vee$).
In una categoria compatta...

- Come si rappresenta graficamente la corrispondenza $f \colon X \otimes Y \to Z \leftrightsquigarrow \widetilde{f} \colon X \to Z^Y$?
- Come si rappresenta graficamente la dualizzazione $f \leftrightsquigarrow f^\vee$?

$$\widetilde{f} := (f \otimes 1_Y) \circ (1_X \otimes c_Y)$$

(fare un disegno)

Rimane solo una proprietà da "categorificare" in **Hilb**: la presenza di un prodotto scalare. In effetti, a questo livello nulla distingue **Vect** da **Hilb**, ma. . . in **Vect** non c'è una identificazione canonica $V \cong V^\vee$!

Definizione

Una categoria daga è una categoria $\mathbf{C}$ *equipaggiata di un funtore* $(-)^\dagger : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ *che è l'identità sugli oggetti, e tale che ad ogni* $f : X \to Y$ *associa un* $f^\dagger Y \to X$*, in modo tale che*

$$(g \circ f)^\dagger = f^\dagger \circ g^\dagger$$
$$(f^\dagger)^\dagger = f$$

- **FHilb** (spazi di dimensione finita) è una categoria daga: dato $f : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ esiste un *aggiunto* $f^\dagger : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ (ben definito grazie alla non degenerazione del prodotto scalare): $f^\dagger y$ è quell'unico $z \in X$ tale che

$$\langle z, x\rangle = \langle y, fx\rangle$$

per ogni $x \in X$, in modo che $\langle f^\dagger y, x\rangle = \langle y, fx\rangle$ per ogni x, y in X, Y.

Hilb è una categoria CDM (Compact, Dagger, Monoidal).

Da dove veniamo, dove andiamo?

- Tutte le considerazioni fatte ora trasportano la struttura di categoria monoidale simmetrica e compatta di **Hilb** alla categoria delle rappresentazioni lineari di un gruppo (di Lie, compatto) $G \curvearrowright \mathcal{H}$. Nel libro *Group Theory* (Princeton University Press, 2008), P. Cvitanović utilizza le stesse tecniche di "calcolo grafico" (ma in modo meno naif) per classificare le categorie

$$\mathrm{Rep}(SU(n)), \quad \mathrm{Rep}(SO(n)), \quad \mathrm{Rep}(U(n)),$$

  più qualche gruppo eccezionale…
- I gruppi *quantici* (che non sono gruppi, e che emergono con regolare frequenza nella fisica contemporanea) si possono caratterizzare come certe algebre aventi una categoria di rappresentazioni lineari $\mathrm{Rep}(\mathfrak{g})$ monoidale simmetrica, compatta e *intrecciata*. La vicenda è studiata con dovizia di dettagli in C. Kassel, *Quantum Groups* (Springer, 1995).