F. LOREGIAN

TEORIA DEGLI AUTOMI DIFFERENZIALI

TAL TECH

$\mathrm{Ita} \underset{\perp}{\rightleftarrows} \mathrm{Ca}$ 2024 — PADOVA

F. LOREGIAN

TEORIA DEGLI AUTOMI DIFFERENZIALI

TAL TECH

Ita $\rightleftarrows$ Ca 2024 — PADOVA

arXiv: 2305.00272

arXiv: 2401.04242

arXiv: 2303.03867

NEGLI ULTIMI DUE ANNI:

$$\{\text{math.CT}\} \cap \{\text{cs.FL}\}$$

NEGLI ULTIMI DUE ANNI:

$$\{\text{math.CT}\} \cap \{\text{cs.FL}\}$$

▷ SORPRESA: NON È ALTRO CHE

NEGLI ULTIMI DUE ANNI:

$$\{\text{math.CT}\} \cap \{\text{cs.FL}\}$$

▷ SORPRESA: NON È ALTRO CHE

TEORIA FORMALE DELLE CATEGORIE

NEGLI ULTIMI DUE ANNI:

$$\{\text{math. CT}\} \cap \{\text{cs. FL}\}$$

▷ SORPRESA: NON È ALTRO CHE

TEORIA FORMALE DELLE CATEGORIE

F.C.T

- Monadi
- Cat di Kleisli
- Ext di Kan

NEGLI ULTIMI DUE ANNI:

$$\{\text{math.CT}\} \cap \{\text{cs.FL}\}$$

▷ SORPRESA: NON È ALTRO CHE

TEORIA FORMALE DELLE CATEGORIE

F.C.T

- Monadi
- Cat di Kleisli
- Ext di Kan
- Strutture 2-dim di categoria
- Prop. universali 2D
- Co/COMPLETAMENTI

NEGLI ULTIMI DUE ANNI:

$\{\text{math.CT}\} \cap \{\text{cs.FL}\}$

▷ SORPRESA: NON È ALTRO CHE

TEORIA FORMALE DELLE CATEGORIE

F.C.T

- Monadi
- Cat di Kleisli
- Ext di Kan

- Strutture 2-dim di categoria
- Prop. universali 2D
- Co/COMPLETAMENTI

- Calcolo dei profuntori

NEGLI ULTIMI DUE ANNI:

$\{\text{math. CT}\} \cap \{\text{cs. FL}\}$

▷ SORPRESA: NON È ALTRO CHE

TEORIA FORMALE DELLE CATEGORIE

F.C.T

- Monadi
- Cat di Kleisli
- Ext di Kan
- Strutture 2-dim di categoria
- Prop. universali 2D
- Co/COMPLETAMENTI
- Calcolo dei profuntori

cs. FL

NEGLI ULTIMI DUE ANNI:

$\{\text{math. CT}\} \cap \{\text{cs. FL}\}$

▷ SORPRESA: NON È ALTRO CHE

TEORIA FORMALE DELLE CATEGORIE

F.C.T

- Monadi
- Cat di Kleisli
- Ext di Kan

- Strutture 2-dim di categoria
- Prop. universali 2D
- Co/COMPLETAMENTI

- Calcolo dei profuntori

cs. FL

- Cat di processi
- Macchine a stati

NEGLI ULTIMI DUE ANNI:

$$\{\text{math. CT}\} \cap \{\text{cs. FL}\}$$

▷ SORPRESA: NON È ALTRO CHE

TEORIA FORMALE DELLE CATEGORIE

F.C.T

- Monadi
- Cat di Kleisli
- Ext di Kan
- Strutture 2-dim di categoria
- Prop. universali 2D
- Co/COMPLETAMENTI
- Calcolo dei profuntori

cs. FL

- Cat di processi
- Macchine a stati
- Riconoscimento di l. formali

NEGLI ULTIMI DUE ANNI:

$\{\text{math. CT}\} \cap \{\text{cs. FL}\}$

▷ SORPRESA: NON È ALTRO CHE

TEORIA FORMALE DELLE CATEGORIE

F.C.T

- Monadi
- Cat di Kleisli
- Ext di Kan
- Strutture 2-dim di categoria
- Prop. universali 2D
- Co/COMPLETAMENTI
- Calcolo dei profuntori

cs. FL

- Cat di processi
- Macchine a stati
- Riconoscimento di l. formali
- Minimizzazione/comportamento

NEGLI ULTIMI DUE ANNI:

$\{\text{math. CT}\} \cap \{\text{cs. FL}\}$

▷ SORPRESA: NON È ALTRO CHE

TEORIA FORMALE DELLE CATEGORIE

F.C.T

- Monadi
- Cat di Kleisli
- Ext di Kan
- Strutture 2-dim di categoria
- Prop. universali 2D
- Co/COMPLETAMENTI
- Calcolo dei profuntori

← SI ORGANIZZANO IN

cs. FL

- Cat di processi
- Macchine a stati
- Riconoscimento di l. formali
- Minimizzazione/comportamento
- ...

NEGLI ULTIMI DUE ANNI:

$\{\text{math. CT}\} \cap \{\text{cs. FL}\}$

▷ SORPRESA: NON È ALTRO CHE

TEORIA FORMALE DELLE CATEGORIE

F.C.T

- Monadi
- Cat di Kleisli
- Ext di Kan

- Strutture 2-dim di categoria
- Prop. universali 2D
- Co/COMPLETAMENTI

- Calcolo dei profuntori

cs. FL

- Cat di processi
- Macchine a stati

- Riconoscimento di l. formali

- Minimizzazione/comportamento

- ...

← SI ORGANIZZANO IN

← SI ENUNCIANO COME

NEGLI ULTIMI DUE ANNI:

$$\{\text{math.CT}\} \cap \{\text{cs.FL}\}$$

▷ **SORPRESA:** NON È ALTRO CHE

TEORIA FORMALE DELLE CATEGORIE

F.C.T

- Monadi
- Cat di Kleisli
- Ext di Kan
- Strutture 2-dim di categoria
- Prop. universali 2D
- Co/COMPLETAMENTI
- Calcolo dei profuntori

← SI ORGANIZZANO IN

← SI ENUNCIANO COME

← SONO

cs. FL

- Cat di processi
- Macchine a stati
- Riconoscimento di l. formali
- Minimizzazione/comportamento
- ...

NEGLI ULTIMI DUE ANNI:

$\{\text{math. CT}\} \cap \{\text{cs. FL}\}$

▷ SORPRESA: NON È ALTRO CHE

TEORIA FORMALE DELLE CATEGORIE

F.C.T

- Monadi
- Cat di Kleisli
- Ext di Kan
- Strutture 2-dim di categoria
- Prop. universali 2D
- Co/COMPLETAMENTI
- Calcolo dei profuntori

← SI ORGANIZZANO IN

← SI ENUNCIANO COME

← SONO

cs. FL

- Cat di processi
- Macchine a stati
- Riconoscimento di l. formali
- Minimizzazione/comportamento
- ...

HO PENSATO PARECCHIO E ...

- "BICATEGORIES OF AUTOMATA — AUTOMATA IN BICATEGORIES"
  ACT 2023

- "BICATEGORIES OF AUTOMATA — AUTOMATA IN BICATEGORIES"
  ACT 2023

- "COMPLETENESS 4 CATEGORIES OF GENERALIZED AUTOMATA"
  CALCO 2023

- "BICATEGORIES OF AUTOMATA — AUTOMATA IN BICATEGORIES"
  ACT 2023
- "COMPLETENESS 4 CATEGORIES OF GENERALIZED AUTOMATA"
  CALCO 2023
- "ON THE SEMIBICATEGORY OF MOORE AUTOMATA"
  arXiv: 2305.00272

- "BICATEGORIES OF AUTOMATA — AUTOMATA IN BICATEGORIES"
  ACT 2023
- "COMPLETENESS 4 CATEGORIES OF GENERALIZED AUTOMATA"
  CALCO 2023
- "ON THE SEMIBICATEGORY OF MOORE AUTOMATA"
  arXiv: 2305.00272
- "AUTOMATA & COALGEBRAS IN CATEGORIES OF SPECIES"
  arXiv: 2401.04242 / CMCS 2024

- "BICATEGORIES OF AUTOMATA — AUTOMATA IN BICATEGORIES"
  ACT 2023

- "COMPLETENESS 4 CATEGORIES OF GENERALIZED AUTOMATA"
  CALCO 2023

- "ON THE SEMIBICATEGORY OF MOORE AUTOMATA"
  arXiv: 2305.00272

- "AUTOMATA & COALGEBRAS IN CATEGORIES OF SPECIES"
  arXiv: 2401.04242 / CMCS 2024

- + UN PAIO DI "WORK IN PROGRESS" ...

UNA "CATEGORIA DI AUTOMI" CONSISTE DELLA CAT

DI MODELLI

UNA "CATEGORIA DI AUTOMI" CONSISTE DELLA (2-)CAT DI MODELLI

UNA "CATEGORIA DI AUTOMI" CONSISTE DELLA (2-)CAT

DI MODELLI DI UN OPPORTUNO SKETCH Cat-ARRICCHITO

UNA "CATEGORIA DI AUTOMI" CONSISTE DELLA (2-)CAT
DI MODELLI DI UN OPPORTUNO SKETCH Cat-ARRICCHITO
(cf. Borceux-Quinteiro)

UNA "CATEGORIA DI AUTOMI" CONSISTE DELLA (2-)CAT

DI MODELLI DI UN OPPORTUNO SKETCH Cat-ARRICCHITO (cf. Borceux-Quinteiro)

COSTRUITO COME SEGUE:

- $\mathbb{K}$ UNA 2-CATEGORIA CON LIMITI FINITI (STRETTI)

UNA "CATEGORIA DI AUTOMI" CONSISTE DELLA (2-)CAT

DI MODELLI DI UN OPPORTUNO SKETCH Cat-ARRICCHITO

(cf. Borceux-Quinteiro)

COSTRUITO COME SEGUE:

- $\mathbb{K}$ UNA 2-CATEGORIA CON LIMITI FINITI (STRETTI)

  $X, B \in \mathbb{K}_0$

UNA "CATEGORIA DI AUTOMI" CONSISTE DELLA (2-)CAT

DI MODELLI DI UN OPPORTUNO SKETCH Cat-ARRICCHITO

(cf. Borceux-Quinteiro)

COSTRUITO COME SEGUE:

- $\mathbb{K}$ UNA 2-CATEGORIA CON LIMITI FINITI (STRETTI)

$X, B \in \mathbb{K}_0$ $\qquad B \xrightarrow{b} X$

UNA "CATEGORIA DI AUTOMI" CONSISTE DELLA (2-)CAT DI MODELLI DI UN OPPORTUNO SKETCH Cat-ARRICCHITO (cf. Borceux-Quinteiro) COSTRUITO COME SEGUE:

- $\mathbb{K}$ UNA 2-CATEGORIA CON LIMITI FINITI (STRETTI)

$X, B \in \mathbb{K}_0$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "b"] & X \arrow[loop right, "f"] \end{tikzcd}$$

UNA "CATEGORIA DI AUTOMI" CONSISTE DELLA (2-)CAT DI MODELLI DI UN OPPORTUNO SKETCH Cat-ARRICCHITO (cf. Borceux–Quinteiro) COSTRUITO COME SEGUE:

- $\mathbb{K}$ UNA 2-CATEGORIA CON LIMITI FINITI (STRETTI)

  $X, B \in \mathbb{K}_0$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "b"] & X \arrow[loop right, "f"] \end{tikzcd}$$

FORMIAMO:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dr, "b"'] & & X \arrow[dl, "f"] \arrow[dr, equal] & & X \arrow[dl, "f"] \\ & X & & X & \end{tikzcd}$$

AUTOMI DI "MEALY"

UNA "CATEGORIA DI AUTOMI" CONSISTE DELLA (2-)CAT

DI MODELLI DI UN OPPORTUNO SKETCH Cat-ARRICCHITO

(cf. Borceux-Quinteiro)

COSTRUITO COME SEGUE:

- $\mathbb{K}$ UNA 2-CATEGORIA CON LIMITI FINITI (STRETTI)

$X, B \in \mathbb{K}_0$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "b"] & X \arrow[loop right, "f"] \end{tikzcd}$$

FORMIAMO:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] B \arrow[dr, "b"'] & & X \arrow[dl, "f"] \arrow[dr, equal] & & X \arrow[dl, "f"] \\ & X & & X & \end{tikzcd}$$

AUTOMI DI "MEALY"

UNA "CATEGORIA DI AUTOMI" CONSISTE DELLA (2-)CAT DI MODELLI DI UN OPPORTUNO SKETCH Cat-ARRICCHITO (cf. Borceux-Quinteiro) COSTRUITO COME SEGUE:

- $\mathbb{K}$ UNA 2-CATEGORIA CON LIMITI FINITI (STRETTI)

$X, B \in \mathbb{K}_0$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "b"] & X \arrow[loop right, "f"] \end{tikzcd}$$

FORMIAMO:

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathrm{Ins}(f,1) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
B \arrow[dr, "b"'] & & X \arrow[dl, "f"] \arrow[dr, equal] \arrow[rr, phantom, "\mathrm{INSERT}"] & & X \arrow[dl, "f"] \\
 & X & & X &
\end{tikzcd}$$

AUTOMI DI "MEALY"

UNA "CATEGORIA DI AUTOMI" CONSISTE DELLA (2-)CAT DI MODELLI DI UN OPPORTUNO SKETCH Cat-ARRICCHITO (cf. Borceux-Quinteiro) COSTRUITO COME SEGUE:

- $\mathbb{K}$ UNA 2-CATEGORIA CON LIMITI FINITI (STRETTI)

  $X, B \in \mathbb{K}_0$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "b"] & X \arrow[loop right, "f"] \end{tikzcd}$$

FORMIAMO:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& f/b \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathrm{Ins}(f,1) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
B \arrow[dr, "b"'] \arrow[rr, phantom, "\text{COMMA}"] & & X \arrow[dl, "f"] \arrow[dr, equal] \arrow[rr, phantom, "\text{INSERT}"] & & X \arrow[dl, "f"] \\
& X & & X &
\end{tikzcd}$$

AUTOMI DI "MEALY"

UNA "CATEGORIA DI AUTOMI" CONSISTE DELLA (2-)CAT

DI MODELLI DI UN OPPORTUNO SKETCH Cat-ARRICCHITO

(cf. Borceux- Quinteiro)

COSTRUITO COME SEGUE:

- $\mathbb{K}$ UNA 2-CATEGORIA CON LIMITI FINITI (STRETTI)

$X, B \in \mathbb{K}_0$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "b"] & X \arrow[loop right, "f"] \end{tikzcd}$$

FORMIAMO:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \mathrm{MLY}(f,b) \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & f/b \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, "\mathrm{PB!}"] & & \mathrm{Ins}(f,1) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
B \arrow[dr, "b"'] \arrow[rr, phantom, "\mathrm{COMMA}"] & & X \arrow[dl, "f"] \arrow[dr, equal] \arrow[rr, phantom, "\mathrm{INSERT}"] & & X \arrow[dl, "f"] \\
 & X & & X &
\end{tikzcd}$$

AUTOMI DI "MEALY"

UNA "CATEGORIA DI AUTOMI" CONSISTE DELLA (2-)CAT DI MODELLI DI UN OPPORTUNO SKETCH Cat-ARRICCHITO (cf. Borceux– Quinteiro) COSTRUITO COME SEGUE:

- $\mathbb{K}$ UNA 2-CATEGORIA CON LIMITI FINITI (STRETTI)

$X, B \in \mathbb{K}_0$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "b"] & X \arrow[loop right, "f"] \end{tikzcd}$$

FORMIAMO:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \mathrm{Mly}(f,b) \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, phantom, "\mathrm{PB!}"] & & \\
 & f/b \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, phantom, "\mathrm{COMMA}"] & & \mathrm{Ins}(f,1) \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, phantom, "\mathrm{INSERT}"] & \\
B \arrow[dr, "b"'] & & X \arrow[dl, "f"] \arrow[dr, equal] & & X \arrow[dl, "f"] \\
 & X & & X &
\end{tikzcd}$$

AUTOMI DI "MEALY"

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & \mathrm{Ins}(f,1) \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, phantom, "\mathrm{INSERT}"] & \\
B \arrow[dr, "b"'] & & X \arrow[dl, equal] \arrow[dr, equal] & & X \arrow[dl, "f"] \\
 & X & & X &
\end{tikzcd}$$

UNA "CATEGORIA DI AUTOMI" CONSISTE DELLA (2-)CAT DI MODELLI DI UN OPPORTUNO SKETCH Cat-ARRICCHITO (cf. Borceux– Quinteiro) COSTRUITO COME SEGUE:

- $\mathbb{K}$ UNA 2-CATEGORIA CON LIMITI FINITI (STRETTI)

  $X, B \in \mathbb{K}_0$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "b"] & X \arrow[loop right, "f"] \end{tikzcd}$$

FORMIAMO:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \mathrm{MLY}(f,b) \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "\lrcorner"] & & \\
 & f/b \arrow[dl] \arrow[dr] & \text{PB!} & \mathrm{Ins}(f,1) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
B \arrow[dr, "b"'] & \text{COMMA} & X \arrow[dl, "f"] \arrow[dr, equal] & \text{INSERT} & X \arrow[dl, "f"] \\
 & X & & X &
\end{tikzcd}$$

AUTOMI DI "MEALY"

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & X/b \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathrm{Ins}(f,1) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
B \arrow[dr, "b"'] & \text{COMMA} & X \arrow[dl, equal] \arrow[dr, equal] & \text{INSERT} & X \arrow[dl, "f"] \\
 & X & & X &
\end{tikzcd}$$

UNA "CATEGORIA DI AUTOMI" CONSISTE DELLA (2-)CAT
DI MODELLI DI UN OPPORTUNO SKETCH Cat-ARRICCHITO
(cf. Borceux–Quinteiro)
COSTRUITO COME SEGUE:

- $\mathbb{K}$ UNA 2-CATEGORIA CON LIMITI FINITI (STRETTI)

$X, B \in \mathbb{K}_0$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "b"] & X \arrow[loop right, "f"] \end{tikzcd}$$

FORMIAMO:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \mathrm{MLY}(f,b) \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, phantom, "\text{PB!}"] & & \\
 & f/b \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathrm{Ins}(f,1) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
B \arrow[dr, "b"'] \arrow[rr, phantom, "\text{COMMA}"] & & X \arrow[dl, "f"] \arrow[dr, equal] \arrow[rr, phantom, "\text{INSERT}"] & & X \arrow[dl, "f"] \\
 & X & & X &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & X/b \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathrm{Ins}(f,1) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
B \arrow[dr, "b"'] \arrow[rr, phantom, "\text{COMMA}"] & & X \arrow[dl, equal] \arrow[dr, equal] \arrow[rr, phantom, "\text{INSERT}"] & & X \arrow[dl, "f"] \\
 & X & & X &
\end{tikzcd}$$

AUTOMI DI "MEALY"

UNA "CATEGORIA DI AUTOMI" CONSISTE DELLA (2-)CAT DI MODELLI DI UN OPPORTUNO SKETCH Cat-ARRICCHITO (cf. Borceux–Quinteiro) COSTRUITO COME SEGUE:

- $\mathbb{K}$ UNA 2-CATEGORIA CON LIMITI FINITI (STRETTI)

$X, B \in \mathbb{K}_0$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "b"] & X \arrow[loop right, "f"] \end{tikzcd}$$

FORMIAMO:

$$\begin{tikzcd}
& & & \mathrm{MLY}(f,b) \arrow[dl] \arrow[dr] & & & \\
& & f/b \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, "\mathrm{PB!}"] & & \mathrm{Ins}(f,1) \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
& B \arrow[dr, "b"'] \arrow[rr, phantom, "\text{COMMA}"] & & X \arrow[dl, "f"] \arrow[dr, equal] \arrow[rr, phantom, "\text{INSERT}"] & & X \arrow[dl, "f"'] & \\
& & X & & X & &
\end{tikzcd}$$

AUTOMI DI "MEALY"

$$\begin{tikzcd}
& & & \mathrm{MRE}(f,b) \arrow[dl] \arrow[dr] & & & \\
& & X/b \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, "\mathrm{PB!}"] & & \mathrm{Ins}(f,1) \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
& B \arrow[dr, "b"'] \arrow[rr, phantom, "\text{COMMA}"] & & X \arrow[dl, equal] \arrow[dr, equal] \arrow[rr, phantom, "\text{INSERT}"] & & X \arrow[dl, "f"'] & \\
& & X & & X & &
\end{tikzcd}$$

UNA "CATEGORIA DI AUTOMI" CONSISTE DELLA (2-)CAT DI MODELLI DI UN OPPORTUNO SKETCH Cat-ARRICCHITO (cf. Borceux–Quinteiro) COSTRUITO COME SEGUE:

- $\mathbb{K}$ UNA 2-CATEGORIA CON LIMITI FINITI (STRETTI)

$X, B \in \mathbb{K}_0$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "b"] & X \arrow[loop right, "f"] \end{tikzcd}$$

FORMIAMO:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \mathrm{Mly}(f,b) \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "\lrcorner"] & & \\
 & f/b \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "\text{COMMA}"] & \text{PB!} & \mathrm{Ins}(f,1) \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "\text{INSERT}"] & \\
B \arrow[dr, "b"'] & {} & X \arrow[dl, "f"] \arrow[dr, equal] & {} & X \arrow[dl, "f"] \\
 & X & & X &
\end{tikzcd}$$

AUTOMI DI "MEALY"

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \mathrm{Mre}(f,b) \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "\lrcorner"] & & \\
 & X/b \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "\text{COMMA}"] & \text{PB!} & \mathrm{Ins}(f,1) \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "\text{INSERT}"] & \\
B \arrow[dr, "b"'] & {} & X \arrow[dl, equal] \arrow[dr, equal] & {} & X \arrow[dl, "f"] \\
 & X & & X &
\end{tikzcd}$$

AUTOMI DI "MOORE"

AD ESEMPIO SE $\mathbb{K} = \mathbf{Cat}$ (CATEGORIE
FUNTORI
T. NATURALI)

AD ESEMPIO SE $\mathbb{K} = \mathbf{Cat}$ (CATEGORIE
FUNTORI
T. NATURALI)

$$F \circlearrowright \overset{cat}{\mathcal{X}} \xleftarrow{B} \mathbb{B}$$

AD ESEMPIO SE $\mathbb{K} = \mathsf{Cat}$ (CATEGORIE
FUNTORI
T. NATURALI)

$$F \circlearrowright \overset{cat}{\mathcal{X}} \xleftarrow{B} \mathcal{B}$$

$\mathrm{Mly}(F,B)$ È LA CAT DEGLI SPAN

$$X \xleftarrow{d} FX \xrightarrow{s} BY$$

AD ESEMPIO SE $\mathbb{K} = \mathbf{Cat}$ (CATEGORIE
FUNTORI
T. NATURALI)

$$F \circlearrowright \overset{cat}{\mathcal{X}} \xleftarrow{B} \mathcal{B}$$

$Mly(F, B)$ È LA CAT DEGLI SPAN

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\varphi"'] & FX \arrow[l, "d"'] \arrow[r, "s"] \arrow[d, "F\varphi"] & BY \arrow[d, "B\psi"] \\
X' & FX' \arrow[l, "d'"'] \arrow[r, "s'"] & BY'
\end{tikzcd}$$

AD ESEMPIO SE $\mathbb{K} = \mathbf{Cat}$ (CATEGORIE
FUNTORI
T. NATURALI)

$$F \circlearrowright \overset{cat}{\mathcal{X}} \xleftarrow{B} \mathcal{B}$$

$Mly(F,B)$ È LA CAT DEGLI SPAN

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\varphi"'] & FX \arrow[l, "d"'] \arrow[r, "s"] \arrow[d, "F\varphi"] & BY \arrow[d, "B\psi"] \\
X' & FX' \arrow[l, "d'"'] \arrow[r, "s'"] & BY'
\end{tikzcd}$$

IN PARTIC $\mathcal{X}$ MONOIDALE,

AD ESEMPIO SE $\mathbb{K} = \mathbf{Cat}$ (CATEGORIE
FUNTORI
T. NATURALI)

$$F \circlearrowright \overset{cat}{\mathcal{X}} \xleftarrow{B} \mathcal{B}$$

$Mly(F,B)$ È LA CAT DEGLI SPAN

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{d} & FX & \xrightarrow{s} & BY \\ {\scriptstyle \varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle B\psi} \\ X' & \xleftarrow{d'} & FX' & \xrightarrow{s'} & BY' \end{array}$$

IN PARTIC $\mathcal{X}$ MONOIDALE,
$F = A \otimes -$

AD ESEMPIO SE $\mathbb{K} = \mathbf{Cat}$ (CATEGORIE FUNTORI T. NATURALI)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[loop left, "F"] & \mathcal{B} \arrow[l, "B"'] \end{tikzcd} \quad \mathbf{cat}$$

$\mathrm{Mly}(F, B)$ È LA CAT DEGLI SPAN

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\varphi"'] & FX \arrow[l, "d"'] \arrow[r, "s"] \arrow[d, "F\varphi"] & BY \arrow[d, "B\psi"] \\ X' & FX' \arrow[l, "d'"'] \arrow[r, "s'"] & BY' \end{tikzcd}$$

IN PARTIC $\mathcal{X}$ MONOIDALE,
$F = A \otimes \_$
$\mathcal{B}$ TERMINALE
$B \in \mathcal{B}_0$

$$\begin{tikzcd} & A \otimes X \arrow[dl, "d"'] \arrow[dr, "s"] & \\ X & & B \end{tikzcd}$$

AD ESEMPIO SE $\mathbb{K} = \mathbf{Cat}$ (CATEGORIE
FUNTORI
T. NATURALI)

$$F \circlearrowright \overset{cat}{\mathcal{X}} \xleftarrow{B} \mathcal{B}$$

$\mathrm{Mly}(F,B)$ È LA CAT DEGLI SPAN

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\varphi"'] & FX \arrow[l, "d"'] \arrow[r, "s"] \arrow[d, "F\varphi"] & BY \arrow[d, "B\psi"] \\
X' & FX' \arrow[l, "d'"'] \arrow[r, "s'"] & BY'
\end{tikzcd}$$

SIMILMENTE
$\mathrm{Mre}(F,B)$

IN PARTIC $\mathcal{X}$ MONOIDALE,
$F = A \otimes \_$
$\mathcal{B}$ TERMINALE
$B \in \mathcal{B}_0$

$$\begin{tikzcd}
 & A \otimes X \arrow[dl, "d"'] \arrow[dr, "s"] \arrow[dd] & \\
X \arrow[dd] & & B \arrow[dd, equal] \\
 & A \otimes X' \arrow[dl, "d'"'] \arrow[dr, "s'"] & \\
X' & & B
\end{tikzcd}$$

AD ESEMPIO SE $\mathbb{K} = \mathbf{Cat}$ (CATEGORIE
FUNTORI
T. NATURALI)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}^{cat} \arrow[loop left, "F"] & \mathcal{B} \arrow[l, "B"'] \end{tikzcd}$$

$\mathrm{Mly}(F, B)$ È LA CAT DEGLI SPAN

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\varphi"'] & FX \arrow[l, "d"'] \arrow[r, "s"] \arrow[d, "F\varphi"] & BY \arrow[d, "B\psi"] \\ X' & FX' \arrow[l, "d'"'] \arrow[r, "s'"] & BY' \end{tikzcd}$$

IN PARTIC $\mathcal{X}$ MONOIDALE,
$F = A \otimes \_$
$\mathcal{B}$ TERMINALE
$B \in \mathcal{B}_0$

$$\begin{tikzcd} & A\otimes X \arrow[dl, "d"'] \arrow[dr, "s"] \arrow[dd] & \\ X \arrow[dd] & & B \arrow[dd, equal] \\ & A\otimes X' \arrow[dl, "d'"'] \arrow[dr, "s'"] & \\ X' & & B \end{tikzcd}$$

SIMILMENTE
$\mathrm{Mre}(F, B)$

$\vdots$

$\vdots$

DIAGRAMMA SCONNESSO

$$\begin{tikzcd} & A\otimes X \arrow[dl, "d"'] & X \arrow[dr, "s"] & \\ X & & & B \end{tikzcd}$$

AD ESEMPIO SE $\mathbb{K} = \mathbf{Cat}$ (CATEGORIE FUNTORI T. NATURALI)

$$\begin{tikzcd} \overset{\text{cat}}{\mathcal{X}} \arrow[loop left, "F"] & \mathcal{B} \arrow[l, "B"'] \end{tikzcd}$$

$Mly(F,B)$ È LA CAT DEGLI SPAN

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\varphi"'] & FX \arrow[l, "d"'] \arrow[r, "s"] \arrow[d, "F\varphi"] & BY \arrow[d, "B\psi"] \\ X' & FX' \arrow[l, "d'"'] \arrow[r, "s'"] & BY' \end{tikzcd}$$

IN PARTIC $\mathcal{X}$ MONOIDALE,
$F = A \otimes \_$
$\mathcal{B}$ TERMINALE
$B \in \mathcal{B}_0$

$$\begin{tikzcd} & A\otimes X \arrow[dl, "d"'] \arrow[dr, "s"] \arrow[dd] & \\ X \arrow[dd] & & B \arrow[dd, equal] \\ & A\otimes X' \arrow[dl, "d'"'] \arrow[dr, "s'"] & \\ X' & & B \end{tikzcd}$$

SIMILMENTE
$Mre(F,B)$

$\vdots$

$\vdots$

$$\begin{tikzcd} & A\otimes X \arrow[dl, "d"'] \arrow[dd, "A\otimes\varphi"] & X \arrow[dd, "\varphi"] \arrow[dr, "s"] & \\ X \arrow[dd, "\varphi"'] & & & B \arrow[dd, equal] \\ & A\otimes X' \arrow[dl, "d'"] & X' \arrow[dr, "s'"] & \\ X' & & & B \end{tikzcd}$$

IN "AUTOMATA & COALGEBRAS" HO STUDIATO UN CASO PARTICOLARE DI QUESTA COSTRUZIONE:

IN "AUTOMATA & COALGEBRAS" HO STUDIATO UN CASO PARTICOLARE DI QUESTA COSTRUZIONE:

LA CAT MONOIDALE $\mathcal{X}$ È LA CAT DELLE SPECIE COMBINATORIE DI JOYAL, Spc

IN "AUTOMATA & COALGEBRAS" HO STUDIATO UN CASO PARTICOLARE DI QUESTA COSTRUZIONE:

LA CAT MONOIDALE $\mathcal{X}$ E' LA CAT DELLE SPECIE COMBINATORIE DI JOYAL, Spc

LA "DINAMICA" E' PRESCRITTA DALL' ENDOFUNTORE $\partial : Spc \longrightarrow Spc$ CHE <u>DERIVA</u> UNA SPECIE COMB.

IN "AUTOMATA & COALGEBRAS" HO STUDIATO UN CASO PARTICOLARE DI QUESTA COSTRUZIONE:

LA CAT MONOIDALE $\mathcal{X}$ E' LA CAT DELLE SPECIE COMBINATORIE DI JOYAL, Spc

LA "DINAMICA" E' PRESCRITTA DALL' ENDOFUNTORE $\partial : \mathsf{Spc} \longrightarrow \mathsf{Spc}$ CHE DERIVA UNA SPECIE COMB.

LA COPPIA (Spc, ∂) E' UN ESEMPIO DI

$\boxed{\text{≥ 2-SEMIANELLO DIFFERENZIALE ≤}}$

IN "AUTOMATA & COALGEBRAS" HO STUDIATO UN CASO PARTICOLARE DI QUESTA COSTRUZIONE:

LA CAT MONOIDALE $\mathcal{K}$ È LA CAT DELLE SPECIE COMBINATORIE DI JOYAL, Spc

LA "DINAMICA" È PRESCRITTA DALL' ENDOFUNTORE $\partial : \mathrm{Spc} \longrightarrow \mathrm{Spc}$ CHE DERIVA UNA SPECIE COMB.

LA COPPIA (Spc, ∂) È UN ESEMPIO DI

≥ 2-SEMIANELLO DIFFERENZIALE ≡

UNA CAT. MONOIDALE $(\mathcal{K}, \otimes)$

$A \otimes -$
$- \otimes B$ COCONTINUI

IN "AUTOMATA & COALGEBRAS" HO STUDIATO UN CASO PARTICOLARE DI QUESTA COSTRUZIONE:

LA CAT MONOIDALE $\mathcal{X}$ E' LA CAT DELLE SPECIE COMBINATORIE DI JOYAL, Spc

LA "DINAMICA" E' PRESCRITTA DALL' ENDOFUNTORE $\partial : \mathsf{Spc} \longrightarrow \mathsf{Spc}$ CHE DERIVA UNA SPECIE COMB.

LA COPPIA (Spc, ∂) E' UN ESEMPIO DI

$\boxed{\text{≥ 2-SEMIANELLO DIFFERENZIALE ≤}}$

UNA CAT. MONOIDALE $(\mathcal{K}, \otimes)$

$A \otimes -$
$- \otimes B$ COCONTINUI

$\partial : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ ENDOFUNTORE,

IN "AUTOMATA & COALGEBRAS" HO STUDIATO UN CASO PARTICOLARE DI QUESTA COSTRUZIONE:

LA CAT MONOIDALE $\mathcal{K}$ E' LA CAT DELLE SPECIE COMBINATORIE DI JOYAL, Spc

LA "DINAMICA" E' PRESCRITTA DALL' ENDOFUNTORE $\partial : \text{Spc} \longrightarrow \text{Spc}$ CHE DERIVA UNA SPECIE COMB.

LA COPPIA (Spc, ∂) E' UN ESEMPIO DI

$\boxed{\geq \text{ 2-SEMIANELLO DIFFERENZIALE } \leq}$

UNA CAT. MONOIDALE $(\mathcal{K}, \otimes)$

$A \otimes -$
$- \otimes B$ COCONTINUI

$\partial : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ ENDOFUNTORE, LINEARE + LEIBNIZ

$\partial(A+B) \cong \partial A + \partial B$

$\partial(A \otimes B) \cong \partial A \otimes B + A \otimes \partial B$

IN "AUTOMATA & COALGEBRAS" HO STUDIATO UN CASO PARTICOLARE DI QUESTA COSTRUZIONE:

LA CAT MONOIDALE $\mathcal{X}$ È LA CAT DELLE SPECIE COMBINATORIE DI JOYAL, Spc

LA "DINAMICA" È PRESCRITTA DALL' ENDOFUNTORE $\partial : \text{Spc} \longrightarrow \text{Spc}$ CHE DERIVA UNA SPECIE COMB.

LA COPPIA (Spc, ∂) È UN ESEMPIO DI

$$\boxed{\ni \text{ 2-SEMIANELLO DIFFERENZIALE } \in}$$

UNA CAT. MONOIDALE $(\mathcal{K}, \otimes)$

$A \otimes -$
$- \otimes B$ COCONTINUI

$\partial : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ ENDOFUNTORE, LINEARE + LEIBNIZ

$\partial(A+B) \cong \partial A + \partial B$

$\partial(A \otimes B) \cong \partial A \otimes B + A \otimes \partial B$

(Spc ha una prop univ. nella 2-cat dei 2-rigs)

IN "AUTOMATA & COALGEBRAS" HO STUDIATO UN CASO PARTICOLARE DI QUESTA COSTRUZIONE:

LA CAT MONOIDALE $\mathcal{X}$ E' LA CAT DELLE SPECIE COMBINATORIE DI JOYAL, Spc

LA "DINAMICA" E' PRESCRITTA DALL' ENDOFUNTORE $\partial : \mathrm{Spc} \longrightarrow \mathrm{Spc}$ CHE DERIVA UNA SPECIE COMB.

LA COPPIA (Spc, ∂) E' UN ESEMPIO DI

$$\boxed{\ \geq \text{ 2-SEMIANELLO DIFFERENZIALE } \equiv\ }$$

UNA CAT. MONOIDALE $(\mathcal{K}, \otimes)$

$A \otimes -$
$- \otimes B$ COCONTINUI

$\partial : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ ENDOFUNTORE, LINEARE + LEIBNIZ

$\partial(A+B) \cong \partial A + \partial B$

$\partial(A \otimes B) \cong \partial A \otimes B + A \otimes \partial B$

(Spc ha una prop univ. nella 2-cat dei 2-rigs)

(?) COS'E' LA TEORIA DEGLI AUTOMI IN UN 2-SEMIANELLO DIFFERENZIALE?

CATEGORIE DI SPECIE COMBINATORIE

$\mathbb{P}$ = CAT DI INSIEMI FINITI
+ FUNZIONI BIIETTIVE

$\mathbb{P}$ = CAT DI INSIEMI FINITI
+ FUNZIONI BIIETTIVE

$\widehat{\mathbb{P}} =: Spc$ PREFASCI SU $\mathbb{P} \cong \sum_{n \geq 0} \Theta(n)$

(GPD OTTENUTO SOMMANDO TUTTI I GRUPPI SYMM)

$\mathbb{P}$ = CAT DI INSIEMI FINITI
+ FUNZIONI BIIETTIVE

$\hat{\mathbb{P}} =: Spc$ PREFASCI SU $\mathbb{P} \cong \sum_{n \geq 0} \Theta(n)$

(GPD OTTENUTO SOMMANDO TUTTI I GRUPPI SYMM)

SPECIE $\simeq$ CATEGORIFICAZIONE DELL'ANELLO DELLE SERIE FORMALI $\mathbb{N}[X]$

$\mathbb{P}$ = CAT DI INSIEMI FINITI
+ FUNZIONI BIIETTIVE

$\widehat{\mathbb{P}} =: \mathrm{Spc}$ PREFASCI SU $\mathbb{P} \cong \sum_{n \geq 0} \mathfrak{S}(n)$

(GPD OTTENUTO SOMMANDO TUTTI I GRUPPI SYMM)

SPECIE $\simeq$ CATEGORIFICAZIONE DELL'ANELLO DELLE SERIE FORMALI $\mathbb{N}[X]$

<u>Joyal</u>: ISO NATURALI TRA OGGETTI DI Spc

$\mathbb{P}$ = CAT DI INSIEMI FINITI
+ FUNZIONI BIIETTIVE

$\widehat{\mathbb{P}} =: \mathrm{Spc}$ PREFASCI SU $\mathbb{P} \cong \sum_{n \geq 0} \mathfrak{S}(n)$

(GPD OTTENUTO SOMMANDO TUTTI I GRUPPI SYMM)

SPECIE $\simeq$ CATEGORIFICAZIONE DELL'ANELLO DELLE SERIE FORMALI $\mathbb{N}[X]$

Joyal: ISO NATURALI TRA OGGETTI DI Spc

$\Rightarrow$ DIM. BIIETTIVE IN COMBINATORIA ENUMERATIVA

$\mathbb{P}$ = CAT DI INSIEMI FINITI
+ FUNZIONI BIIETTIVE

$\widehat{\mathbb{P}} =: \mathrm{Spc}$ PREFASCI SU $\mathbb{P} \cong \sum_{n\geq 0} \mathfrak{S}(n)$

(GPD OTTENUTO SOMMANDO TUTTI I GRUPPI SYMM)

SPECIE $\simeq$ CATEGORIFICAZIONE DELL'ANELLO DELLE SERIE FORMALI $\mathbb{N}[X]$

<u>Joyal</u>: ISO NATURALI TRA OGGETTI DI Spc

$\Rightarrow$ DIM. BIIETTIVE IN COMBINATORIA ENUMERATIVA

STRUTTURE MONOIDALI

$(\mathrm{Spc}, \times)$

(ANCHE CLOSED)

$\mathbb{P}$ = CAT DI INSIEMI FINITI
+ FUNZIONI BIIETTIVE

$\hat{\mathbb{P}} =: \mathrm{Spc}$ PREFASCI SU $\mathbb{P} \cong \sum_{n \geq 0} \mathfrak{S}(n)$

(GPD OTTENUTO SOMMANDO TUTTI I GRUPPI SYMM)

SPECIE $\simeq$ CATEGORIFICAZIONE DELL'ANELLO DELLE SERIE FORMALI $\mathbb{N}[X]$

Joyal: ISO NATURALI TRA OGGETTI DI Spc
$\Rightarrow$ DIM. BIIETTIVE IN COMBINATORIA ENUMERATIVA

STRUTTURE MONOIDALI

$(\mathrm{Spc}, \times)$ (ANCHE CLOSED)

$(\mathrm{Spc}, +)$ (ANCHE COCOMPLETA)

$\mathbb{P}$ = CAT DI INSIEMI FINITI
+ FUNZIONI BIIETTIVE

$\widehat{\mathbb{P}} =: Spc$ PREFASCI SU $\mathbb{P} \cong \sum_{n \geq 0} \mathfrak{S}(n)$

(GPD OTTENUTO SOMMANDO TUTTI I GRUPPI SYMM)

SPECIE $\simeq$ CATEGORIFICAZIONE DELL'ANELLO DELLE SERIE FORMALI $\mathbb{N}[X]$

Joyal: ISO NATURALI TRA OGGETTI DI Spc
$\Rightarrow$ DIM. BIIETTIVE IN COMBINATORIA ENUMERATIVA

STRUTTURE MONOIDALI

$(Spc, \times)$ (ANCHE CLOSED)

$(Spc, +)$ (ANCHE COCOMPLETA)

$(Spc, \otimes)$ ↳ CAUCHY

$\mathbb{P}$ = CAT DI INSIEMI FINITI
+ FUNZIONI BIIETTIVE

$\widehat{\mathbb{P}} =: \mathrm{Spc}$ PREFASCI SU $\mathbb{P} \cong \sum_{n \geq 0} \mathfrak{S}(n)$

(GPD OTTENUTO SOMMANDO TUTTI I GRUPPI SYMM)

SPECIE $\simeq$ CATEGORIFICAZIONE DELL'ANELLO DELLE SERIE FORMALI $\mathbb{N}[X]$

Joyal: ISO NATURALI TRA OGGETTI DI Spc
$\Rightarrow$ DIM. BIIETTIVE IN COMBINATORIA ENUMERATIVA

STRUTTURE MONOIDALI

$(\mathrm{Spc}, \times)$ (ANCHE CLOSED)

$(\mathrm{Spc}, +)$ (ANCHE COCOMPLETA)

$(\mathrm{Spc}, \otimes)$ ↳ CAUCHY

$(\mathrm{Spc}, \circ)$ ↳ OPERADICO

CAUCHY

~~CAUCHY~~

CONVOLUZIONE DI DAY

~~CAUCHY~~
CONVOLUZIONE DI DAY

$(\mathbb{P}, \oplus)$ MONOIDALE WRT
UNIONE DISGIUNTA

$$[n] \oplus [m] = [n+m]$$

~~CAUCHY~~ CONVOLUZIONE DI DAY

$(\mathbb{P}, \oplus)$ MONOIDALE WRT UNIONE DISGIUNTA

$$[n] \oplus [m] = [n+m]$$

$$(F, G) \mapsto F \otimes G$$

$$[n] \mapsto \int^{pq} F(p) \times G(q) \times \mathbb{P}(n, p \oplus q)$$

~~CAUCHY~~ CONVOLUZIONE DI DAY

$(\mathbb{P}, \oplus)$ MONOIDALE WRT UNIONE DISGIUNTA

$$[n] \oplus [m] = [n+m]$$

$$(F, G) \mapsto F \otimes G$$

$$[n] \mapsto \int^{pq} F(p) \times G(q) \times \mathbb{P}(n, p \oplus q)$$

CATEGORIFICA

$$\underset{(a_n)}{f(X)} \cdot \underset{(b_n)}{g(X)} = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{p+q=n} a_p b_q \right) X^n$$

~~CAUCHY~~ CONVOLUZIONE DI DAY

$(\mathbb{P}, \oplus)$ MONOIDALE WRT UNIONE DISGIUNTA

$$[n] \oplus [m] = [n+m]$$

$$(F,G) \mapsto F \otimes G$$

$$[n] \mapsto \int^{pq} F(p) \times G(q) \times \mathbb{P}(n, p \oplus q)$$

IN PARTIC. $F^{\otimes n} = F \otimes \cdots \otimes F$ n volte

$$= \int^{p_1 - p_n} Fp_1 \times Fp_2 \times \cdots Fp_n \times \mathbb{P}(m, \sum p_i)$$

CATEGORIFICA

$$\underset{(a_n)}{f(X)} \cdot \underset{(b_n)}{g(X)} = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{p+q=n} a_p b_q \right) X^n$$

~~CAUCHY~~ CONVOLUZIONE DI DAY

$(\mathbb{P}, \oplus)$ MONOIDALE WRT UNIONE DISGIUNTA

$[n] \oplus [m] = [n+m]$

$(F,G) \mapsto F \otimes G$

$$[n] \mapsto \int^{pq} F(p) \times G(q) \times \mathbb{P}(n, p \oplus q)$$

IN PARTIC. $F^{\otimes n} = F \otimes \cdots \otimes F$ n volte

$$= \int^{p_1 - p_n} Fp_1 \times Fp_2 \times \cdots Fp_n \times \mathbb{P}(m, \textstyle\sum pi)$$

CATEGORIFICA

$$\underset{(a_n)}{f(X)} \cdot \underset{(b_n)}{g(X)} = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{p+q=n} a_p b_q \right) X^n$$

SOSTITUZIONE

$$F \circ G = \int^{p} F^{\otimes p} \times Gp$$

~~CAUCHY~~

CONVOLUZIONE DI DAY

$(\mathbb{P}, \oplus)$ MONOIDALE WRT UNIONE DISGIUNTA

$$[n] \oplus [m] = [n+m]$$

$$(F, G) \mapsto F \otimes G$$

$$[n] \mapsto \int^{pq} F(p) \times G(q) \times \mathbb{P}(n, p \oplus q)$$

IN PARTIC. $F^{\otimes n} = F \otimes \cdots \otimes F$ n volte

$$= \int^{p_1 - p_n} F p_1 \times F p_2 \times \cdots F p_n \times \mathbb{P}(m, \sum p_i)$$

CATEGORIFICA

$$\underset{(a_n)}{f(X)} \cdot \underset{(b_n)}{g(X)} = \sum_{n \geq 0} \Big(\sum_{p+q=n} a_p b_q \Big) X^n$$

SOSTITUZIONE

$$F \circ G = \int^{p} F^{\otimes p} \times G p$$

CATEGORIFICA

$$f(g(X)) = \sum_{n \geq 0} a_n (g(X))^n$$

~~CAUCHY~~ CONVOLUZIONE DI DAY

$(\mathbb{P}, \oplus)$ MONOIDALE WRT UNIONE DISGIUNTA

$[n] \oplus [m] = [n+m]$

$(F,G) \mapsto F \otimes G$

$$[n] \mapsto \int^{pq} F(p) \times G(q) \times \mathbb{P}(n, p \oplus q)$$

IN PARTIC. $F^{\otimes n} = F \otimes \cdots \otimes F$ n volte

$$= \int^{p_1 - p_n} F p_1 \times F p_2 \times \cdots F p_n \times \mathbb{P}(m, \textstyle\sum p_i)$$

CATEGORIFICA

$$\underset{(a_n)}{f(X)} \cdot \underset{(b_n)}{g(X)} = \sum_{n \geq 0} \Big(\sum_{p+q=n} a_p b_q \Big) X^n$$

SOSTITUZIONE

$$F \circ G = \int^{p} F^{\otimes p} \times G p$$

CATEGORIFICA

$$f(g(X)) = \sum_{n \geq 0} a_n (g(X))^n$$

$\partial : \mathrm{Spc} \to \mathrm{Spc}$ CATEGORIFICA $\frac{d}{dX} f(X) = \sum_{n \geq 0} a_{n+1} X^n \big/ n!$

∂ SODDISFA

$\rightsquigarrow$ REGOLA DI LEIBNIZ

∂ SODDISFA

$\rightsquigarrow$ REGOLA DI LEIBNIZ

$\rightsquigarrow$ REGOLA DELLA CATENA

∂ SODDISFA

- $\rightsquigarrow$ REGOLA DI LEIBNIZ
- $\rightsquigarrow$ REGOLA DELLA CATENA
- $\rightsquigarrow$ OGNI SPECIE "CONVERGE" ALLA SERIE DI TAYLOR DELLE DERIVATE ITERATE

$$F(X+A) \cong \sum_{n \geq 0} \frac{\partial^n FA}{n!} \otimes X^n$$

∂ SODDISFA

- REGOLA DI LEIBNIZ
- REGOLA DELLA CATENA
- OGNI SPECIE "CONVERGE" ALLA SERIE DI TAYLOR DELLE DERIVATE ITERATE

$$F(X+A) \cong \sum_{n \geq 0} \frac{\partial^n FA}{n!} \otimes X^n$$

- ∂ HA UN AGGIUNTO SX

  E UNO DX!

$$L \dashv \partial \dashv R$$

∂ SODDISFA

⇝ REGOLA DI LEIBNIZ

⇝ REGOLA DELLA CATENA

⇝ OGNI SPECIE "CONVERGE" ALLA SERIE DI TAYLOR DELLE DERIVATE ITERATE

$$F(X+A) \cong \sum_{n \geq 0} \frac{\partial^n FA}{n!} \otimes X^n$$

⇝ ∂ HA UN AGGIUNTO SX
E UNO DX!

$$\underbrace{L \dashv \partial}_{\text{UTILE PERCHÉ}} \dashv R$$

UTILE PERCHÉ
$L\partial$ È A SUA VOLTA
UNA DERIVAZIONE ("OP. DI EULERO")

∂ SODDISFA

- REGOLA DI LEIBNIZ
- REGOLA DELLA CATENA
- OGNI SPECIE "CONVERGE" ALLA SERIE DI TAYLOR DELLE DERIVATE ITERATE

$$F(X+A) \cong \sum_{n\geq 0} \frac{\partial^n FA}{n!} \otimes X^n$$

- ∂ HA UN AGGIUNTO SX E UNO DX !

$$\underbrace{L \dashv \overbrace{\partial}^{} }_{} \overbrace{\dashv R}$$

UTILE STUDIANDO $X \xleftarrow{d} \partial X \xrightarrow{s} B \sim$ COALG$(\tilde{R})$

$\tilde{R} X = RB \times RX$

UTILE PERCHÉ $L\partial$ È A SUA VOLTA UNA DERIVAZIONE ("OP. DI EULERO")

L'OSSERVAZIONE CHE $\mathrm{MLY}(\partial, B) \simeq \mathrm{COALG}(\tilde{R})$

DÀ CONTO DELLA NATURA COMPLESSA DEL SUO

OGGETTO TERMINALE :

L'OSSERVAZIONE CHE $\mathrm{MLY}(\partial, B) \simeq \mathrm{COALG}(\tilde{R})$ DÀ CONTO DELLA NATURA COMPLESSA DEL SUO OGGETTO TERMINALE:

$$\mathrm{COALG.TERM}(\tilde{R}) = \prod_{n \geq 1} R^n B$$

$$= RB \times RRB \times RRRB \times \dots$$

L'OSSERVAZIONE CHE $MLY(\partial, B) \simeq COALG(\tilde{R})$

DA' CONTO DELLA NATURA COMPLESSA DEL SUO

OGGETTO TERMINALE :

$$COALG.TERM(\tilde{R}) = \prod_{n \geq 1} R^n B$$

$$= RB \times RRB \times RRRB \times \dots$$

CF. LA NOZIONE DI ω-LIMITE IN TEORIA DEI SIS. DINAMICI

$$\Omega(x_0, \varphi) := \bigcap_{n \geq 1} \overline{\{ \varphi^k(x_0) \mid k > n \}}$$

CHIUSURA

L'OSSERVAZIONE CHE $MLY(\partial, B) \simeq COALG(\tilde{R})$

DÀ CONTO DELLA NATURA COMPLESSA DEL SUO

OGGETTO TERMINALE :

$$COALG.TERM(\tilde{R}) = \prod_{n \geq 1} R^n B$$

$$= RB \times RRB \times RRRB \times \dots$$

CF. LA NOZIONE DI ω-LIMITE IN TEORIA DEI SIS. DINAMICI

$$\Omega(x_0, \varphi) := \bigcap_{n \geq 1} \overline{\{\varphi^k(x_0) \mid k > n\}}$$

CHIUSURA

LE CATEGORIE

$MLY(L, B)$ $MLY(R\partial, B)$

$MLY(L\partial, B)$ $MLY(\partial L, B)$

$MLY(\partial R, B)$

$L \dashv \partial \dashv R$

$L\partial \dashv R\partial$ $\partial L \dashv \partial R$

SONO A LORO VOLTA INTERESSANTI

LA CAT. DELLE ∂-ALGEBRE E' IL MATTONE PER COSTRUIRE $\mathrm{MLY}(\partial, B)$.

$\mathrm{ALG}(\partial)$ E' A SUA VOLTA UN ANELLO DIFFERENZIALE!

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Alg}\,\partial \arrow[r] \arrow[d, "\partial'"'] & \mathrm{Spc} \arrow[d, "\partial"] \\
\mathrm{Alg}\,\partial \arrow[r] & \mathrm{Spc}
\end{tikzcd}
$$

LEGGE DISTRIBUTIVA

$\partial\partial \xrightarrow[id]{} \partial\partial$

LA CAT. DELLE ∂-ALGEBRE È IL MATTONE PER COSTRUIRE $MLY(\partial, \theta)$.

$ALG(\partial)$ È A SUA VOLTA UN ANELLO DIFFERENZIALE!

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \mathrm{Alg}\,\partial \arrow[r] \arrow[d, "\partial'"'] & \mathrm{Spc} \arrow[d, "\partial"] \\
{} \arrow[r] & \mathrm{Alg}\,\partial \arrow[r] & \mathrm{Spc}
\end{tikzcd}$$

LA CAT. DELLE ∂-ALGEBRE E' IL MATTONE PER COSTRUIRE $MLY(\partial, \theta)$.

$ALG(\partial)$ E' A SUA VOLTA UN ANELLO DIFFERENZIALE!

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \mathrm{Alg}\,\partial' \arrow[r] \arrow[d, "\partial''"'] & \mathrm{Alg}\,\partial \arrow[r] \arrow[d, "\partial'"'] & \mathrm{Spc} \arrow[d, "\partial"] \\
{} \arrow[r] & \mathrm{Alg}\,\partial' \arrow[r] & \mathrm{Alg}\,\partial \arrow[r] & \mathrm{Spc}
\end{tikzcd}$$

↳ STESSO MOTIVO

LA CAT. DELLE ∂-ALGEBRE È IL MATTONE PER COSTRUIRE $MLY(\partial, \theta)$.

$ALG(\partial)$ È A SUA VOLTA UN ANELLO DIFFERENZIALE!

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & Alg\,\partial'' \arrow[r] \arrow[d] & Alg\,\partial' \arrow[r] \arrow[d, "\partial''"'] & Alg\,\partial \arrow[r] \arrow[d, "\partial'"'] & Spc \arrow[d, "\partial"] \\
\cdots \arrow[r] & Alg\,\partial'' \arrow[r] & Alg\,\partial' \arrow[r] & Alg\,\partial \arrow[r] & Spc
\end{tikzcd}$$

LA CAT. DELLE ∂-ALGEBRE È IL MATTONE PER COSTRUIRE $MLY(\partial, \theta)$.

ALG(∂) È A SUA VOLTA UN ANELLO DIFFERENZIALE!

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Alg}_{\partial''} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Alg}_{\partial'} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''"'] & \mathrm{Alg}_{\partial} \arrow[r] \arrow[d, "\partial'"'] & \mathrm{Spc} \arrow[d, "\partial"] \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Alg}_{\partial''} \arrow[r] & \mathrm{Alg}_{\partial'} \arrow[r] & \mathrm{Alg}_{\partial} \arrow[r] & \mathrm{Spc}
\end{tikzcd}$$

IL LIMITE INVERSO DI QUESTA CATENA È LO SPAZIO DEI GETTI DELLA CATEGORIA Spc

LA CAT. DELLE ∂-ALGEBRE È IL MATTONE PER COSTRUIRE $MLY(\partial, B)$.

$ALG(\partial)$ È A SUA VOLTA UN ANELLO DIFFERENZIALE!

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Alg}\,\partial'' \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Alg}\,\partial' \arrow[r] \arrow[d, swap, "\partial''"] & \mathrm{Alg}\,\partial \arrow[r] \arrow[d, swap, "\partial'"] & \mathrm{Spc} \arrow[d, "\partial"] \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Alg}\,\partial'' \arrow[r] & \mathrm{Alg}\,\partial' \arrow[r] & \mathrm{Alg}\,\partial \arrow[r] & \mathrm{Spc}
\end{tikzcd}
$$

IL LIMITE INVERSO DI QUESTA CATENA È LO **SPAZIO DEI GETTI** DELLA CATEGORIA Spc

CF. GEO DIFF DOVE $f \in C^\infty(M)$ SI ESPANDE IN UNA SERIE "DI TAYLOR".

LA CAT. DELLE ∂-ALGEBRE E' IL MATTONE PER COSTRUIRE $MLY(\partial, B)$.

$ALG(\partial)$ E' A SUA VOLTA UN ANELLO DIFFERENZIALE!

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Alg}\,\partial'' \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Alg}\,\partial' \arrow[r] \arrow[d, "\partial''"'] & \mathrm{Alg}\,\partial \arrow[r] \arrow[d, "\partial'"'] & \mathrm{Spc} \arrow[d, "\partial"] \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Alg}\,\partial'' \arrow[r] & \mathrm{Alg}\,\partial' \arrow[r] & \mathrm{Alg}\,\partial \arrow[r] & \mathrm{Spc}
\end{tikzcd}$$

IL LIMITE INVERSO DI QUESTA CATENA E' LO **SPAZIO DEI GETTI** DELLA CATEGORIA Spc

CF. GEO DIFF DOVE $f \in C^\infty(M)$ SI ESPANDE IN UNA SERIE "DI TAYLOR".

$$\mathrm{Jet}[\mathrm{Spc}, \partial] := \lim \left(\mathrm{Spc} \leftarrow \mathrm{Alg}\,\partial \leftarrow \mathrm{Alg}\,\partial' \leftarrow \cdots \right)$$

LA CAT. DELLE ∂-ALGEBRE È IL MATTONE PER COSTRUIRE $MLY(\partial, B)$.

$ALG(\partial)$ È A SUA VOLTA UN ANELLO DIFFERENZIALE!

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & Alg\,\partial'' \arrow[r] \arrow[d] & Alg\,\partial' \arrow[r] \arrow[d, "\partial''"'] & Alg\,\partial \arrow[r] \arrow[d, "\partial'"'] & Spc \arrow[d, "\partial"] \\
\cdots \arrow[r] & Alg\,\partial'' \arrow[r] & Alg\,\partial' \arrow[r] & Alg\,\partial \arrow[r] & Spc
\end{tikzcd}$$

IL LIMITE INVERSO DI QUESTA CATENA È LO SPAZIO DEI GETTI DELLA CATEGORIA Spc

CF. GEO DIFF DOVE $f \in C^\infty(M)$ SI ESPANDE IN UNA SERIE "DI TAYLOR".

$$Jet[Spc, \partial] := \lim \left(Spc \leftarrow Alg\,\partial \leftarrow Alg\,\partial' \leftarrow \cdots \right)$$

$$\underline{X}^{\omega} = \left(X \leftarrow \partial X \leftarrow \partial\partial X \leftarrow \partial\partial\partial X \leftarrow \cdots \right)$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

LA STRUTTURA DEL MODULO $Der[Spc, \partial]$
È COMPLICATA (DESCRITTA DA UN ZRIG DEI DIFF. DI KÄHLER)

LA STRUTTURA DEL MODULO $\mathrm{Der}[\mathrm{Spc}, \partial]$ È COMPLICATA

▷ [Joyal, 8?] IL SOTTOANELLO DELLE COSTANTI È COMPLICATO

LA STRUTTURA DEL MODULO $\mathrm{Der}[\mathrm{Spc}, \partial]$
È COMPLICATA

▷ [Joyal, 8?] IL SOTTOANELLO DELLE COSTANTI È
COMPLICATO

▷ [Scuola Canadese di Combinatoria] SOLUZIONI DI UNA ODE
SONO RARAMENTE UNICHE

LA STRUTTURA DEL MODULO $\mathrm{Der}[\mathrm{Spc}, \partial]$
È COMPLICATA

▷ [Joyal, 8?] IL SOTTOANELLO DELLE COSTANTI È COMPLICATO

▷ [Scuola Canadese di Combinatoria] SOLUZIONI DI UNA ODE SONO RARAMENTE UNICHE

MAKE CAUCHY–LIPSCHITZ GREAT AGAIN!

LA STRUTTURA DEL MODULO $\mathrm{Der}[S_{pc}, \partial]$ E' COMPLICATA

▷ [Joyal, 8?] IL SOTTOANELLO DELLE COSTANTI E' COMPLICATO

▷ [Scuola Canadese di Combinatoria] SOLUZIONI DI UNA ODE SONO RARAMENTE UNICHE

MAKE CAUCHY-LIPSCHITZ GREAT AGAIN!

↳ RIDEF. "EQUAZIONE DIFFERENZIALE" COSÌ DA RENDERE UNA SUA "SOLUZIONE"

1) UNICA

LA STRUTTURA DEL MODULO $\mathrm{Der}[\mathrm{Spc}, \partial]$
È COMPLICATA

▷ [Joyal, 8?] IL SOTTOANELLO DELLE COSTANTI È COMPLICATO

▷ [Scuola Canadese di Combinatoria] SOLUZIONI DI UNA ODE SONO RARAMENTE UNICHE

MAKE CAUCHY-LIPSCHITZ GREAT AGAIN!

↳ RIDEF. "EQUAZIONE DIFFERENZIALE"
COSÌ DA RENDERE UNA SUA
"SOLUZIONE"

1) UNICA
2) INTERESSANTE.

OSS. 1 $\mathrm{Cat}(\mathrm{Spc}, \mathrm{Spc})_+$ = FUNTORI "LINEARI"

È UN 2-RIG!

OSS. 1 $\mathrm{Cat}(\mathrm{Spc}, \mathrm{Spc})_+$ = FUNTORI "LINEARI"

È UN 2-RIG !

DEF $\mathrm{Arb}(\mathrm{Spc}, \partial)$ "ALGEBRA DI ARBOGAST"

:= 2-RIG GENERATO DA ∂

OSS. 1 $\mathrm{Cat}(\mathrm{Spc}, \mathrm{Spc})_+$ = FUNTORI "LINEARI"

È UN 2-RIG !

DEF $\mathrm{Arb}(\mathrm{Spc}, \partial)$ "ALGEBRA DI ARBOGAST"

:= 2-RIG GENERATO DA ∂

(UN ESEMPIO DI D-2-MODULO ?)

OSS. 1 $\mathrm{Cat}(\mathrm{Spc}, \mathrm{Spc})_+$ = FUNTORI "LINEARI"

È UN 2-RIG!

DEF $\mathrm{Arb}(\mathrm{Spc}, \partial)$ "ALGEBRA DI ARBOGAST"

:= 2-RIG GENERATO DA ∂

(UN ESEMPIO DI D-2-MODULO?)

$\hookrightarrow$ OGGETTI DELL'ALGEBRA DI ARBOGAST $= \sum_{i \in I} A_i \otimes \partial^{n_i}$

OSS. 1 $\quad Cat(Spc, Spc)_+ \quad = $ FUNTORI "LINEARI"

È UN 2-RIG !

DEF $\quad Arb(Spc, \partial)$ "ALGEBRA DI ARBOGAST"

$:=$ 2-RIG GENERATO DA ∂

(UN ESEMPIO DI D-2-MODULO ?)

$\hookrightarrow$ OGGETTI DELL'ALGEBRA DI ARBOGAST $= \sum_{i \in I} A_i \otimes \partial^{n_i}$

DEF: $\quad \delta \in Arb(Spc, \partial)$ DEFINISCE UNA EQ. DIFF

δX

OSS. 1 $\quad \mathrm{Cat}(\mathrm{Spc}, \mathrm{Spc})_+ \quad$ = FUNTORI "LINEARI"

È UN 2-RIG!

DEF $\quad \mathrm{Arb}(\mathrm{Spc}, \partial)$ "ALGEBRA DI ARBOGAST"

:= 2-RIG GENERATO DA ∂

(UN ESEMPIO DI D-2-MODULO ?)

↳ OGGETTI DELL'ALGEBRA DI ARBOGAST $= \sum_{i \in I} A_i \otimes \partial^{n_i}$

DEF: $\quad \delta \in \mathrm{Arb}(\mathrm{Spc}, \partial)$ DEFINISCE UNA EQ. DIFF

δX

"SOLUZIONE" DELL'EQ DESCRITTA DA δ È UNA

δ-COALGEBRA TERMINALE.

OSS. 1 $\mathrm{Cat}(\mathrm{Spc}, \mathrm{Spc})_+$ = FUNTORI "LINEARI"

È UN 2-RIG !

DEF $\mathrm{Arb}(\mathrm{Spc}, \partial)$ "ALGEBRA DI ARBOGAST"

:= 2-RIG GENERATO DA ∂

(UN ESEMPIO DI D-2-MODULO ?)

↳ OGGETTI DELL'ALGEBRA DI ARBOGAST $= \sum_{i \in I} A_i \otimes \partial^{n_i}$

DEF: $\delta \in \mathrm{Arb}(\mathrm{Spc}, \partial)$ DEFINISCE UNA EQ. DIFF

$$\delta X \cong X \quad (\text{universalmente})$$

"SOLUZIONE" DELL'EQ DESCRITTA DA δ È UNA

δ-COALGEBRA TERMINALE.

CONCLUSIONI

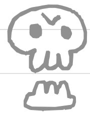
- C'È UNA TEORIA DEI 2-ANELLI (COMMUTATIVI & NO)

- DIVENTA INTERESSANTE QUANDO SUI 2-ANELLI C'È UNA DERIVAZIONE

- SUGGERISCE UNA "GEOMETRIA" DEI 2-ANELLI
  ($\mathrm{Der}(\mathcal{R}, \partial) \simeq$ SPAZIO TG A $\mathcal{R}$)

(... AD ITACA 2025 ?)

QUESTO TALK E' DEDICATO A

(E NON E' VENUTO )

1) IL MIO FUTURO DOTTORANDO GUIDO CHE E' SPAVENTATO NON AVREBBE FATTO CT PURA IN UN DIPARTIMENTO DI C.S.

QUESTO TALK E' DEDICATO A

1) IL MIO FUTURO DOTTORANDO GUIDO CHE E'
SPAVENTATO NON AVREBBE FATTO CT PURA
IN UN DIPARTIMENTO DI C.S.

2) UN MIO VECCHIO PROF., M. GARUTI CHE
MI HA INSEGNATO L'ALGEBRA DIFFERENZIALE
(E SE FOSSE ANCORA CON NOI AVREBBE
SPERO APPREZZATO Ita $\rightleftarrows$ Ca ♡)

QUESTO TALK E' DEDICATO A

1) IL MIO FUTURO DOTTORANDO GUIDO CHE E' SPAVENTATO NON AVREBBE FATTO CT PURA IN UN DIPARTIMENTO DI C.S.

2) UN MIO VECCHIO PROF., M. GARUTI CHE MI HA INSEGNATO L'ALGEBRA DIFFERENZIALE (E SE FOSSE ANCORA CON NOI AVREBBE SPERO APPREZZATO Ita $\rightleftarrows$ Ca ♡)

GRAZIE !