Fibrati e Connessioni

Guy Le Baube, "Rue Bois Le Vent" (1971)

1 Generalità sui Fibrati Vettoriali.

Nel seguito B è uno spazio topologico connesso e paracompatto (vuol dire che B è di Hausdorff e ogni ricoprimento aperto di B ammette un raffinamento aperto localmente finito), detto *spazio di base*.

Definizione 1.1 [Fibrato Vettoriale]: *Un* fibrato vettoriale reale ξ *su* B *consiste nei dati seguenti:*

- *Uno spazio topologico* E *detto* spazio totale*;*
- *Una mappa continua e suriettiva* $\pi\colon E \to B$ *detta* proiezione*;*
- *Una struttura di* $\mathbb{R}$*-spazio vettoriale su ciascuna delle fibre* $\pi^{\leftarrow}(\{b\}) = F_b$*.*

Tali dati devono soddisfare la seguente condizione di trivializzazione locale*:*

> *Per ogni* $b \in B$ *esistono un intorno* $U \subseteq B$ *e un omeomorfismo*
>
> $$h_b\colon U \times F_b \cong \pi^{\leftarrow}(U) \tag{1}$$
>
> *tali che il diagramma sotto sia commutativo.*
>
> $$\begin{tikzcd} \pi^{\leftarrow}(U) \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "\pi"'] & U \times F_b \arrow[d, "proj_1"] \\ & U \end{tikzcd} \tag{2}$$

U ed F_b hanno la topologia di sottospazio e $U \times F_b$ la prodotto. Grazie ad h resta definito un isomorfismo tra $\mathbb{R}^\kappa$ (ove $\kappa = \dim_{\mathbb{R}} F_b$) e F_b stesso mediante la corrispondenza $\underline{x} \mapsto h(b, \underline{x})$.

Una coppia (h, U) come sopra è detta *sistema di coordinate locali*, o *trivializzazione locale* per il fibrato ξ. Se si può scegliere $U = E$, il fibrato ξ è detto *triviale* su B.

Lo spazio vettoriale F_b è detto *fibra* di ξ sopra E. Se c'è pericolo di confusione si denota $F_b(\xi)$.

Per l'ipotesi di suriettività fatta, $F_b \neq \varnothing$ per ogni $b \in B$. La *dimensione* di F_b (che supponiamo ora e sempre finita) è una funzione continua $B \to \mathbb{N}$ (con la topologia discreta sul secondo), che deve perciò essere localmente costante.

Osservazione 1 : *In una terminologia più generale, un fibrato (anche non vettoriale) su uno spazio* B *consiste nel dato di una applicazione continua e suriettiva* $p\colon E \to B$*, tale che ogni* $x \in B$ *abbia un intorno* U *per cui* $p^{\leftarrow}(U) \cong U \times F_x$*, per qualche spazio topologico* F_x*: questa sola condizione assicura che* $p^{\leftarrow}(\{x\}) \cong F_x$*, e dunque* F_x *si può sensatamente pensare come lo spazio della fibra di* $x \in B$*.*

Gli aperti U della condizione sono detti *aperti banalizzanti*; la classe di omeomorfismo della fibra F_x è costante restando su un aperto banalizzante, dunque è localmente costante; si può eliminare il pedice x chiamando F la fibra.

Appare chiaro dove aggiungere delle ipotesi per ottenere fibrati *vettoriali*; un omomorfismo di fibrati vettoriali è una mappa continua verso B che "rispetta le fibre", ossia tale che $\phi|_F$ sia una applicazione lineare tra le fibre. La nozione di *fibrato vettoriale liscio* si può dare analogamente.

1.0.1 Alcuni Esempi.

Esempio 1.1 [Fibrato Banale]: *Il* fibrato banale ϵ_B *con spazio totale* $E = B \times \mathbb{R}^n$ *ha la mappa di proiezione* $\pi\colon E \to B\colon (b, \underline{x}) \mapsto b$

Osservazione 2 : *Un fibrato è triviale se e solo se è isomorfo a* ϵ_B.

Esempio 1.2 [Fibrato Tangente]: *Il* fibrato tangente τ_M *ad una varietà liscia* M *di dimensione* n *è un fibrato liscio (con un argomento classico si riesce a dotare* TM *di una struttura di varietà liscia).*

Lo spazio totale è la varietà $TM = \coprod_{p\in M} T_pM$, *ovvero fatta dalle coppie* $(p, \underline{v})$, *dove* $p \in M$ *e* $\underline{v} \in T_pM$ *è un vettore tangente a* M *in* p.

La proiezione è definita da $(p, \underline{v}) \mapsto p$, *di modo che* $\pi^{\leftarrow}(p) = T_pM$, *ed in effetti* $TM = \coprod_{p\in M} T_pM$. *La condizione di trivialità locale è semplice da verificare: in*

$$\begin{tikzcd} \coprod_{p\in U} T_pM \arrow[r, "h"] \arrow[d] & U \times \mathbb{R}^n \arrow[dl, "proj"] \\ U & \end{tikzcd} \tag{3}$$

la mappa h *è definita come* $(p, \underline{v}) \mapsto (p, \psi(\underline{v}))$, *dove* $\psi \in GL(\mathbb{R}^n)$ *è un qualsiasi isomorfismo lineare che identifica* T_pM *ed* $\mathbb{R}^n$ *(per esempio, scelte delle coordinate* $x_1, \dots x_n$ *date da una carta di* M *attorno a* p, *e vedendo* T_pM *come spazio di derivazioni,* ψ *manda* $\frac{\partial}{\partial x^i}$ *in* $\underline{e}_i$ *-base canonica-).*

Osservazione 3 : *In modo analogo si definisce il fibrato* cotangente *ad* M, τ_M^* *con spazio totale fatto dall'unione disgiunta* $\coprod_{p\in M} T_p^*M = \coprod_{p\in M}(T_pM)^*$

Esempio 1.3 [Fibrato Normale]: *Se* M *è una varietà liscia di dimensione* n, *immersa in* $\mathbb{R}^N$ *per qualche* $N > n$, *lo spazio totale del* fibrato normale ν_M *si ottiene dall'unione disgiunta* $\coprod_{p\in M}(T_pM)^\perp$ *(l'ortogonale è quello indotto dall'usuale prodotto scalare di* $\mathbb{R}^N$*). La proiezione è* $\pi\colon NM \to M\colon (p, \alpha) \mapsto p$, *in modo che* $\pi^{\leftarrow}(p) = (T_pM)^\perp$.

Esempio 1.4 [Spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$]: *Lo* spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ *è definito come l'insieme dei punti della sfera* n*-dimensionale* $\mathbb{S}^n$ *quozientato dalla relazione di antipodia. Abbiamo modo, a partire da tale spazio, di costruire un fibrato vettoriale: se chiamiamo* $E(\gamma_{1,n})$ *il sottoinsieme di* $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n+1}$ *fatto dalle coppie* $([x], \underline{v})$, *dove* $\underline{v} = \lambda x$, *definiamo* $\pi\colon E(\gamma_{1,n}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})\colon ([x], \underline{v}) \mapsto [x]$.

Ogni fibra si può quindi identificare alla retta di $\mathbb{R}^{n+1}$ *che congiunge i punti antipodali* x *e* $-x$, *con la naturale struttura di spazio vettoriale. Questo è un esempio di* fibrato in rette, *detto fibrato in rette* tautologico *su* $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Il fibrato in rette tautologico su $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è localmente triviale. Si scelga $U \subseteq \mathbb{S}^n$ tale da non contenere punti antipodali, e sia U_1 la sua immagine in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Si definisce facilmente un omeomorfismo

$$\begin{aligned} h\colon U_1 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \pi^{\leftarrow}(U_1) \\ ([x], \lambda) &\longmapsto ([x], \lambda x). \end{aligned} \tag{4}$$

Per mostrare che $\gamma_{1,1}$ non è globalmente triviale, definiamo

Definizione 1.2 : *Una* sezione *di un fibrato* ξ *su* B *è una funzione continua* $s\colon B \to E(\xi)$ *tale che* $s(b) \in F_b$ *per ogni* $b \in B$.

Una sezione s *si dice* mai nulla *se* $s(b) \neq 0_{F_b}$ *per ogni* $b \in B$.

Esempio 1.5 : *Se M è una varietà liscia, una sezione del fibrato tangente TM si dice* campo vettoriale *su M. Un fibrato isomorfo al banale possiede almeno una sezione trasversale mai nulla, ossia (fissato un vettore $\underline{v} \neq \underline{0}$ in F_b)*

$$\begin{aligned} s\colon B &\longrightarrow B \times \mathbb{R}^n \\ b &\longmapsto (b, \underline{v}) \end{aligned} \tag{5}$$

Però $\gamma_{1,1}$ non può averla (dunque la tesi segue dal Teorema 1.1): se $s\colon \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to E(\gamma_{1,1})$ è una sezione, la composizione $\mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n \to E$ che manda $x \in \mathbb{S}^n$ in una coppia $([x], t(x) \cdot x)$, mediante una funzione $t\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$, continua e tale che $t(-x) = -t(x)$, è continua. Essendo $\mathbb{S}^n$ connessa, $t(-)$ deve annullarsi in almeno un punto x_0, dunque $s(x_0) = ([x_0], 0)$. □

Nel caso particolare $n = 1$, ogni elemento $e \in E(\gamma_{1,1})$ si riesce a scrivere come $([(\cos\theta, \sin\theta)], t(\cos\theta, \sin\theta))$, per qualche $0 \leq \theta \leq \pi$, e $t \in \mathbb{R}$.

Tale rappresentazione è unica eccetto che per il fatto che i punti immagine di $(0, t)$ e $\pi, t)$ coincidono per ogni $t \in \mathbb{R}$. In altre parole,$E(\gamma_{1,1})$ si ottiene da $[0, \pi] \times \mathbb{R}$ nel piano (θ, t) identificando $\{0\} \times \mathbb{R}$ con $\{\pi\} \times \mathbb{R}$, grazie alla mappa $(0, t) \mapsto (\pi, -t)$: $E(\gamma_{1,1})$ è il nastro di Möbius (aperto).

Un criterio di trivialità per un fibrato ξ è il seguente:

Definizione 1.3 : *Le sezioni $s_1, \dots, s_k$ di un fibrato ξ su B si dicono* indipendenti *se per ogni $b \in B$ i vettori $s_1(b), \dots, s_k(b)$ sono linearmente indipendenti in $F_b(\xi)$.*

Teorema 1.1 : *Un fibrato di dimensione n su B è triviale se e solo se ammette n sezioni indipendenti.*

La dimostrazione dipende dal seguente Lemma

Lemma 1.1 : *Siano ξ, η due fibrati di dimensione n su B, e sia $f\colon E(\xi) \to E(\eta)$ una funzione continua che manda ogni fibra $F_b(\xi)$ in $F_b(\eta)$ con un isomorfismo lineare f_b. Allora f è un omeomorfismo. In altre parole due fibrati sono isomorfi se e solo se lo sono fibra per fibra.*

Proof. Dato $b \in B$ possiamo scegliere coordinate locali (U, g) e (V, h) su $E(\xi)$ ed $E(\eta)$ tali che $b \in U \cap V$. Allora esiste un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} \pi_\xi^{\leftarrow}(U \cap V) \arrow[r, dash, "g"] \arrow[d] & (U \cap V) \times \mathbb{R}^n \arrow[dl, "\text{proj}"'] \arrow[d, dash, "h"] \\ U \cap V & \pi_\eta^{\leftarrow}(U \cap V) \arrow[l] \end{tikzcd} \tag{6}$$

Se mostriamo che la composizione $h^{-1} \circ f \circ g$ è un omeomorfismo abbiamo concluso. Poniamo $h^{-1} \circ f \circ g(b, \underline{x}) = (b, \underline{y})$, dove $\underline{y} = f_b(\underline{x})$ si può scrivere $y_i = \sum f_{ij}(b) x_j$, per certi coefficienti reali f_{ij}, funzioni continue di $b \in B$, tali che $\det f_{ij}(b) \neq 0$.

Se $f_{ij}^{-1}(b)$ è la matrice inversa a $f_{ij}(b)$ è chiaro che la mappa $(b, \underline{y}) \mapsto (b, \underline{x})$, dove $x_i = \sum f_{ij}^{-1} y_j$, è l'inversa di $h^{-1} \circ f \circ g$ ed è continua, dunque è un omeomorfismo. La tesi segue perché ora $h^{-1} \circ f \circ g = u$, isomorfismo, implica $f = h \circ u \circ g^{-1}$, composizione di isomorfismi. □

Ora, se $s_1, \dots, s_n$ sono sezioni indipendenti del fibrato ξ, definiamo la mappa

$$\begin{aligned} f\colon B \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow E \\ (b, \underline{v}) &\longmapsto \sum v_i s_i(b) \end{aligned} \tag{7}$$

Per costruzione f è una funzione continua che manda ogni fibra del fibrato banale in una fibra di E, isomorficamente. La tesi dunque segue dal precedente Lemma.

Viceversa, sul fibrato banale $B \times \mathbb{R}^n$ ci sono le sezioni costanti e indipendenti $s_i(b) = (b, \underline{e}_i)$. ($\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ è la base canonica.) □

1.1 Funzioni di Transizione.

Sia ξ un fibrato su B di proiezione $\pi\colon E \to B$. Gli aperti banalizzanti formano un ricoprimento di B, che indichiamo con $\{U_i\}$. In corrispondenza di due trivializzazioni locali $h_i\colon \pi^{\leftarrow}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{R}^n$ e $h_j\colon \pi^{\leftarrow}(U_j) \cong U_j \times \mathbb{R}^n$, si ottiene, per restrizione all'intersezione $U_{ij} := U_i \cap U_j$, un isomorfismo h_{ij}, definito da

$$\begin{aligned} h_i \circ h_j^{-1}\colon U_{ij} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow U_{ij} \times \mathbb{R}^n \\ (x, \underline{v}) &\longmapsto (x, g_{ij}(x)\underline{v}), \end{aligned} \tag{8}$$

dove $g_{ij}\colon U_{ij} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ è una mappa continua (o liscia se B è una varietà). Le funzioni g_{ij} sono dette funzioni di transizione per E. Esse soddisfano le identità (dette *condizioni di cociclo*)

$$g_{ij}(x)g_{ji}(x) = \mathrm{id}_{U_{ij}\times\mathbb{R}^n} \text{ per ogni } x \in U_{ij}$$
$$g_{ik}(x) = g_{ij}(x)g_{jk}(x) \text{ per ogni } x \in U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$$

Proof. Entrambe le identità sono conseguenza del fatto che g_{ij} è l'unica mappa tale che $h_{ij} = \mathrm{id}_{U_{ij}} \times g_{ij}$. La prima segue dal fatto che $h_{ij} \circ h_{ji} = h_i \circ h_j^{-1} \circ h_j \circ h_i^{-1} = \mathrm{id}_{U_{ij}\times\mathbb{R}^n}$, dunque $g_{ij}(x)g_{ji}(x)\underline{v} = \underline{v}$ per ogni $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, che implica quanto affermato.

La seconda segue dal fatto che $\mathrm{id}_{U_{ik}} \times g_{ik} = h_{ik} = h_i \circ h_k^{-1} = h_i \circ h_j^{-1} \circ h_j \circ h_k^{-1} = (\mathrm{id}_{U_{ij}} \times g_{ij}) \circ (\mathrm{id}_{U_{jk}} \times g_{jk}) = \mathrm{id}_{U_{ik}} \times (g_{ij} \circ g_{jk})$, per ogni $x \in U_{ijk}$, e per l'unicità di cui sopra si conclude. □

Le funzioni di transizione di un fibrato lo caratterizzano univocamente, nel senso che se viene dato un ricoprimento aperto dello spazio di base, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ ed una famiglia di mappe continue $g_{ij}\colon U_{ij} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ che soddisfano le condizioni di cociclo, esiste un unico fibrato vettoriale di dimensione n che ammette le g_{ij} come funzioni di transizione. Esso è costruito prendendo per spazio totale E l'unione disgiunta

$$\coprod_{i\in I} \big(U_i \times \mathbb{R}^n\big) \tag{9}$$

quozientata per la relazione di equivalenza generata dall'identificazione $(x, \underline{v}) \sim (y, \underline{v}')$ se e solo se $x = y$ e $\underline{v}' = g_{ij}(x)\underline{v}$.

Se su E c'è la topologia quoziente, $\pi\colon E \to B$ è una mappa continua e suriettiva. Le trivializzazioni locali $h_i\colon \pi^{\leftarrow}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{R}^n$ sono definite da $h_i^{-1}(x, \underline{v}) = [(x, \underline{v})]$ (la classe nel quoziente).

1.2 Operazioni sui Fibrati.

La collezione dei fibrati su B è una famiglia di oggetti resa ricca dal trasporto di molte costruzioni topologiche (prodotti fibrati, cartesiani) e vettoriali (somme dirette, ortogonali, duali) alle proiezioni sullo spazio B. Vediamo in che modo i principali trasporti hanno luogo.

1.2.1 Restrizione ad un sottospazio della base.

Sia ξ un fibrato di proiezione $\pi\colon E \to B$, e B' un sottospazio di B. Poniamo $E' = \pi^{\leftarrow}(B')$ e sia π' la corestrizione di π a B'. La mappa $\pi'\colon E' \to B'$ è la proiezione di un fibrato, detto *restrizione* di ξ a B' e denotato $\xi|_{B'}$. La fibra $F_b(\xi|_{B'})$ è uguale alla fibra $F_b(\xi)$ per ogni $b \in B'$, ed eredita in questo modo l'identica struttura di spazio vettoriale.

Esempio 1.6 : *Se M è una varietà liscia, e U un suo sottoinsieme aperto, il fibrato tangente a U τ_U corrisponde a $\tau_M|_U$ (nelle notazioni dell'Esempio 1.2).*

La costruzione si può generalizzare nel modo che segue.

1.2.2 Fibrato indotto da una mappa continua.

Sia ξ un fibrato di proiezione $\pi\colon E \to B$, e B' un generico spazio topologico. Data una mappa continua $f\colon B' \to B$ definiamo il fibrato *indotto* da f, $f^*\xi$, come quello di spazio totale $E' = E \times_B B'$ nel diagramma cartesiano

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "\pi'"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ B' \arrow[r, "f"'] & B. \end{tikzcd} \tag{10}$$

E' quindi è l'insieme $\{(e, b) \in E \times B' \mid \pi(e) = f(b)\}$: la mappa $\hat{f}$ è definita da $(e, b) \mapsto e$, e $\pi'\colon (e, b) \mapsto b$, di modo che $\pi \circ \hat{f} = f \circ \pi'$.

Grazie a questa relazione $\hat{f}$, ristretta alle fibre $F_b(f^*\xi)$ e $F_{f(b)}(\xi)$ è un isomorfismo lineare: infatti

$$\hat{f}\big((\alpha\underline{v}_1 + \beta\underline{v}_2, b)\big) = \alpha\underline{v}_1 + \beta\underline{v}_2 = \alpha\hat{f}(\underline{v}_1, b) + \beta\hat{f}(\underline{v}_2, b) \tag{11}$$

e banalmente $F_b(f^*\xi) = (\pi')^{\leftarrow}(b) = \{e \in E \mid \pi(e) = f(b)\} \times \{b\} \cong \{e \in E \mid \pi(e) = f(b)\} = \pi^{\leftarrow}(f(b)) = F_{f(b)}(\xi)$. Ciò prova che $\hat{f}$ è una applicazione lineare biiettiva.

Da ultimo, se (U, h) è una trivializzazione locale di ξ, poniamo $U' = f^{\leftarrow}(U)$ e

$$\begin{aligned} h'\colon U' \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow (\pi')^{\leftarrow}(U') \\ (b, \underline{v}) &\longmapsto (b, h(f(b), \underline{v})). \end{aligned} \tag{12}$$

Questa definizione è ben data se $(b, h(f(b), \underline{v}))$ sta in $(\pi')^{\leftarrow}(U') = (\pi')^{\leftarrow} \circ f^{\leftarrow}(U)$. Lo fa, perché $f \circ \pi'(b, h(f(b), \underline{v}) = \pi \circ \hat{f}((b, h(f(b), \underline{v})) = \pi(h(f(b), \underline{v})) = f(b) \in U$ (dato che $b \in U'$). $\square$

Esercizio 1 : *Si dimostri che se ξ è un fibrato triviale, tale è anche $f^*\xi$.*

Osservazione 4 : *È possibile definire una nozione di* omomorfismo di fibrati *anche se gli spazi di base sono diversi; siano perciò ξ, η due fibrati su $B(\xi), B(\eta)$ con proiezioni $\pi_\xi\colon E(\xi) \to B(\xi)$ e $\pi_\eta\colon E(\eta) \to B(\eta)$. Un omomorfismo di fibrati da η a ξ è una mappa continua tra gli spazi totali, $g\colon E(\eta) \to E(\xi)$ che manda ogni fibra $F_b(\eta)$ in una qualche fibra $F_{b'}(\xi)$, in modo isomorfo (più fibre potrebbero finire nella stessa $F_{b'}(\xi)$,* *e non tutte le fibre $F_{b'}(\xi)$ potrebbero essere raggiunte, rispettivamente nel caso in cui g non sia iniettiva o non sia suriettiva).*

La posizione $\overline{g}\colon b \mapsto b'$, definisce evidentemente una mappa continua tra gli spazi di base.

Vale il seguente

LEMMA 1.2 : *Se $g\colon E(\eta) \to E(\xi)$ è un omomorfismo di fibrati nel senso precedente, e $\overline{g}$ la mappa indotta tra gli spazi di base, allora $\eta \cong \overline{g}^*\xi$.*

Proof. Definiamo la mappa $h\colon E(\eta) \to E(\overline{g}^*\xi)\colon e \mapsto (\pi_\eta(e), g(e))$; si osservi che h è l'unica mappa tale da far commutare in tutte le sue parti il diagramma di pull-back

$$\begin{tikzcd}
E(\eta) \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[dr, dotted, "h"'] \arrow[ddr, bend right, "\pi_\eta"'] & & \\
& B(\eta) \times_{B(\xi)} E(\xi) \arrow[r] \arrow[d] & E(\xi) \arrow[d] \\
& B(\eta) \arrow[r, "\overline{g}"'] & B(\xi)
\end{tikzcd} \tag{13}$$

(questo non è casuale dato che $E(\overline{g}^*)$ si ottiene davvero tramite un pull-back). Ora però h è continua e tale che se $e \in F_b(\eta)$, $(\pi_\eta(e), g(e)) = (b, g(e)) \in (\pi')^{\leftarrow}(b)$, con un isomorfismo lineare determinato da g. La tesi segue dal Lemma 1.1, che dice che h è un omeomorfismo. □

1.2.3 Prodotto Cartesiano.

Dati due fibrati vettoriali ξ_1, ξ_2 di proiezioni $\pi_1\colon E_1 \to B_1$, $\pi_2\colon E_2 \to B_2$, il *prodotto* $\xi_1 \times \xi_2$ dei due fibrati è definito come quello che ha per proiezione la mappa

$$\begin{aligned} \pi_1 \times \pi_2\colon E_1 \times E_2 &\longrightarrow B_1 \times B_2 \\ (e_1, e_2) &\longmapsto (\pi_1(e_1), \pi_2(e_2)) \end{aligned} \tag{14}$$

in modo he ogni fibra sia il prodotto delle fibre dei due: $(\pi_1 \times \pi_2)^{\leftarrow}(b_1, b_2) = F_{b_1}(\xi_1) \times F_{b_2}(\xi_2)$.

ESEMPIO 1.7 : *Se M è una varietà liscia che risulta dal prodotto cartesiano di varietà $M_1 \times M_2$ (dotato della struttura differenziabile indotta dal prodotto di atlanti), il fibrato tangente τ_M è isomorfo a $\tau_{M_1} \times \tau_{M_2}$.*

Si può affermare, in linea generale, che le costruzioni universali tra spazi vettoriali ne inducono di analoghe tra fibrati che hanno quegli spazi vettoriali per fibre. Quelli che seguono sono degli esempi di quanto appena detto.

1.2.4 Somma di Whitney.

Dati due fibrati ξ_1, ξ_2 di proiezioni $\pi_1\colon E_1 \to B, \pi_2\colon E_2 \to B$, la *somma di Whitney* di ξ_1 e ξ_2 è il fibrato $\xi_1 \oplus \xi_2$ che ha per fibra sopra b la somma diretta delle fibre $F_b(\xi_1) \oplus F_b(\xi_2)$, e spazio totale l'unione disgiunta $\coprod_{b\in B} F_b(\xi_1) \oplus F_b(\xi_2)$ di tutte queste fibre, con l'ovvia proiezione definita da $\pi_\oplus(b, \underline{v} + \underline{w}) = b$.

A partire da trivializzazioni locali

$$h_i\colon \pi_1^{\leftarrow}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{R}^n$$
$$k_i\colon \pi_2^{\leftarrow}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{R}^m$$

su uno stesso aperto U_i otteniamo biiezioni $\sigma^{\leftarrow}(U_i) \cong U_i \times (\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m)$; le funzioni di transizione di questo fibrato sono le mappe

$$\begin{aligned} U_{ij} &\longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m) \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} g^1_{ij}(x) & 0 \\ 0 & g^2_{ij}(x) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{15}$$

g^1_{ij} e g^2_{ij} essendo le funzioni di transizione di ξ_1 e ξ_2 rispettivamente.

Equivalentemente, definiamo la mappa diagonale relativa allo spazio di base

$$\begin{aligned} d\colon B &\longrightarrow B \times B \\ b &\longmapsto (b, b) \end{aligned} \tag{16}$$

e il fibrato $\xi_1 \oplus \xi_2 = d^*(\xi_1 \times \xi_2)$; ogni fibra $F_b(\xi_1 \oplus \xi_2)$ è canonicamente isomorfa alla somma diretta $F_b(\xi_1) \oplus F_b(\xi_2)$, in quanto spazio vettoriale isomorfo a $F_b(\xi_1) \times F_b(\xi_2)$.

1.2.5 Complemento Ortogonale.

Definizione 1.4 : *Siano ξ, η fibrati vettoriali su uno stesso spazio di base, tali che $E(\xi) \subset E(\eta)$. Si dice che ξ è un* sottofibrato *di η se ogni fibra $F_b(\xi)$ è un sottospazio vettoriale di $F_b(\eta)$.*

Il Lemma 1.1 porge immediatamente il risultato che segue

Proposizione 1.1 : *Siano ξ_1, ξ_2 due sottofibrati di η tali che $F_b(\eta) = F_b(\xi_1) \oplus F_b(\xi_2)$ per ogni $b \in B$. Allora $\eta \cong \xi_1 \oplus \xi_2$.*

Può a questo punto nascere la domanda: dato un sottofibrato ξ di η, esiste sempre un "complemento ortogonale" per ξ tale che $\eta = \xi \oplus \tau$? In effetti è chiaro come questo sia possibile, a opportune ipotesi[1], bastando promuovere ad un fibrato $\xi^\perp$ quello che ha per fibre gli ortogonali $F_b(\xi)^\perp$ in η.

Teorema 1.2 : *Sia $F_b(\xi^\perp) = F_b(\xi)^\perp$, e $E(\xi^\perp) = \coprod_{b \in B} F_b(\xi^\perp) \subset E(\eta)$. Questo definisce un sottofibrato di η, detto $\xi^\perp$ e chiamato* complemento ortogonale *di ξ, in modo che $\eta \cong \xi \oplus \xi^\perp$.*

1.2.6 Duale, Tensore, Potenza Esterna e Simmetrica.

Dovrebbe apparire chiaro a questo punto che la regola operativa da seguire è che *operazioni sugli spazi vettoriali ne inducono, di analoghe, tra i fibrati vettoriali che hanno quegli spazi per fibre*; il modo più comodo di definire tali fibrati è attraverso le funzioni di transizione, dato che esse sono determinate, in ultima analisi, da mappe lineari $U \to \mathrm{GL}(F(\xi))$ (si pensi per esempio ad una varietà liscia M, le mappe di transizione del suo fibrato tangente -su una sua trivializzazione locale- sono delle $g_{ij}(x) \in \mathrm{GL}(T_x M)$); in questo senso possiamo definire

[1]Queste ipotesi sono: lo spazio di base deve essere paracompatto, o almeno η deve essere un fibrato vettoriale euclideo, nel senso precisato dalla Definizione **??**; la paracompattezza, grazie al teorema di Whitney -ibidem- implica questa condizione.

- Il *fibrato duale* di un fibrato $\xi\colon E \to B$, denotato $\xi^*\colon E^* \to B$ e definito dalle transizioni
$$g^\dagger_{ij}(x) = g^{-\mathrm{t}}_{ij}(x) \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n) \tag{17}$$
(identificato a $\mathrm{GL}\big((\mathbb{R}^n)^*\big)$ grazie all'isomorfismo canonico);

- Il fibrato *prodotto tensoriale* di $E \to B \leftarrow E'$ (rispettivamente di dimensione n ed m), denotato $\xi \otimes \xi'\colon E \otimes E' \to B$ e definito dalle transizioni
$$k_{ij} = g_{ij}(x) \otimes g'_{ij}(x) \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m) \cong \mathrm{GL}(\mathbb{R}^{nm}); \tag{18}$$

- Il fibrato *potenza esterna* di $\xi\colon E \to B$, denotato $\bigwedge^k \xi\colon \bigwedge^k E \to B$, e quello *potenza simmetrica*, denotato $\bigodot \xi\colon \bigodot E \to B$, definiti rispettivamente dalle transizioni
$$\begin{aligned} w_{ij}(x) &= \textstyle\bigodot g_{ij}(x) \in \mathrm{GL}(\bigodot \mathbb{R}^n) \\ z_{ij}(x) &= \textstyle\bigwedge^k (g_{ij})(x) \in \mathrm{GL}(\bigwedge^k \mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Se $\xi\colon E \to B$ è un fibrato di dimensione n, $\bigwedge^n \xi$ è sempre un fibrato in rette, chiamato *fibrato determinante* di ξ, ed è definito dalle transizioni $k_{ij}(x) = \det g_{ij}(x)$; si indica con $\det \xi$.

Esercizio 2 : *Si dimostri che valgono i seguenti isomorfismi, per tre fibrati ξ, η, θ.*
$$\begin{gathered} (\xi \oplus \eta) \oplus \theta \cong \xi \oplus (\eta \oplus \theta) \qquad \xi \oplus \eta \cong \eta \oplus \xi \\ (\xi \otimes \eta) \otimes \theta \cong \xi \otimes (\eta \otimes \theta) \qquad \xi \otimes \eta \cong \eta \otimes \xi \\ (\xi \oplus \eta)^* \cong \xi^* \oplus \eta^* \qquad (\xi \otimes \eta)^* \cong \xi^* \otimes \eta^* \\ \textstyle\bigwedge^k \xi^* \cong \big(\bigwedge^k \xi\big)^* \qquad \bigwedge^{n-k} \xi \cong \bigwedge^k \xi \end{gathered}$$

Se ξ e ξ' sono due fibrati vettoriali su una stessa base B, si è già detto che un omomorfismo di fibrati è determinato da una mappa continua f tra gli spazi totali che si restringe ad una mappa lineare sulle fibre. Se (U, h), (U', h') sono due trivializzazioni locali, la mappa $\widetilde{f}$ ottenuta dalla commutatività di
$$\begin{tikzcd} U \times \mathbb{R}^n \arrow[r] \arrow[d, dash] & U' \times \mathbb{R}^m \arrow[d, dash] \\ \pi^{\leftarrow}(U) & (\pi')^{\leftarrow}(U') \end{tikzcd} \tag{19}$$
si dice *espressione locale* di f nelle trivializzazioni scelte. Essa è della forma $(x, \underline{v}) \mapsto (x, G(x)\underline{v})$, ove $G\colon U \to \hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ è una mappa sufficientemente regolare (nella topologia ovvia di $\hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$).

1.3 Esempi educativi.

1.3.1 Il fibrato tensoriale $T^r_s(M)$.

La sezione 1.2.6 non ha raccontato la storia per intero, e $\bigwedge \xi, \bigodot \xi$ sono esempi di una costruzione più generale.

Diamo per nota la costruzione (universale) che ad uno spazio vettoriale V di dimensione finita associa l'*algebra tensoriale* (controvariante) su V: essa consiste della somma diretta

$$T_*(V) = \bigoplus_{n\geq 0} V^{\otimes n} \tag{20}$$

$V^{\otimes n}$ indicando lo spazio $V\otimes\cdots\otimes V$ fatto n volte. $T_*(V)$ gode della proprietà di rialzare ogni applicazione lineare $\phi\colon V \to A$, ove A è una k-algebra, ad una applicazione $T_*(f)$ di k-algebre; se una base di V è data da $\underline{e}_1, \dots \underline{e}_d$, una base di $V^{\otimes n}$ è fatta dai d^n simboli formali $\underline{e}_{\otimes I} = \underline{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \underline{e}_{i_n}$, dove $1 \leq i_1, \dots, i_n \leq d$.

Una analoga costruzione dà l'algebra tensoriale *contro*variante su V, $T^*(V) = \bigoplus_{n\geq 0}(V^*)^{\otimes n}$: l'algebra tensoriale *totale* si ottiene, generalizzando un altro po', dalla somma diretta degli spazi $T^n_m(V) = V^{\otimes m} \otimes (V^*)^{\otimes n}$:

$$T(V) = \bigoplus_{m,n\geq 0} V^{\otimes m} \otimes (V^*)^{\otimes n}. \tag{21}$$

Esercizio 3 : *Trovare una base per $T^n_m(V)$.*

Ci occupiamo ora dello studio di fibrati *tensoriali* (di grado (r,s)) ottenuti da un fibrato dato; richiamiamo prima qualche risultato che discende dalla funtorialità della assegnazione $V \rightsquigarrow T_*(V), T^*(V)$.

Definizione 1.5 [Fibrato tensoriale di ξ]: *Sia $\pi\colon E \to B$ la proiezione di un fibrato ξ. Denotiamo come al solito $F_b(\xi) = \pi^{\leftarrow}(b)$ per ogni $b \in B$. Definiamo*

$$T^r_s(\xi) := \coprod_{b\in B} T^r_s(F_b(\xi)) \tag{22}$$

e $\pi^r_s\colon T^r_s(\xi) \to B\colon (\underline{e}, b) \mapsto b$ nel modo ovvio, per ogni $\underline{e} \in T^r_s(F_b(\xi))$. Allo stesso modo, se $A \subseteq B$, definiamo $T^r_s(E)|_A := \coprod_{b\in A} T^r_s(F_b(\xi))$. Se $\pi'\colon E' \to B$ è la proiezione di un altro fibrato ξ', ed $f\colon E \to E'$ è un omomorfismo di fibrati che è isomorfismo sulle fibre (ossia $f^b = f|_{F_b(\xi)}$ è un isomorfismo), definitamo $T^r_s(f)\colon T^r_s(\xi) \to T^r_s(\xi')$ con la posizione $T^r_s(f)|_{T^r_s(F_b(\xi))} = T^r_s(f^b)$.

Se $\{U_i\}$ è un ricoprimento di aperti trivializzanti di B, allora $\{\pi^{\leftarrow}(U_i)\}$ è un ricoprimento dello spazio totale, e ciascun $\pi^{\leftarrow}(U_i)$ è omeomorfo mediante le trivializzazioni locali a $U_i \times F$ (la fibra senza pedice è la generica fibra sopra $b \in B$). Da ciò segue che $\{(\pi^r_s)^{\leftarrow}(U_i)\}$ ricopre lo spazio totale di $T^r_s(\xi)$ e che restano indotte (il consiglio per esplicitarle è di cercare le funzioni di transizione) delle trivializzazioni locali $h_i\colon (\pi^r_s)^{\leftarrow}(U_i) \cong U_i \times T^r_s(F(\xi))$.

Queste coordinate locali sono chiamate coordinate "naturali" su $T^r_s(\xi)$. Se lo spazio totale di ξ era una varietà, si dimostri che lo è anche lo spazio totale di $T^r_s(\xi)$, e che le coordinate naturali sono un atlante per questa struttura di varietà.

In effetti tutto questo si può specializzare (e acquista senso nel momento in cui questo viene fatto) al caso in cui $\xi = \tau_M$ è il fibrato tangente a una varietà liscia.

Definizione 1.6 : *Sia M una varietà liscia e τ_M il suo fibrato tangente. Il* fibrato dei tensori di tipo (s,r) su M *è definito da $T^r_s(M) = T^r_s(\tau_M)$.*

Il fibrato tangente τ_M si identifica con $T^1_0(M)$, e il cotangente a $T^0_1(M)$ (oltre che al fibrato duale τ^*_M).

Come ulteriore approfondimento studiamo le sezioni lisce del fibrato dei tensori di tipo (r,s) su una varietà.

Campi di Tensori. Si rammenti anzitutto che una sezione di un fibrato vettoriale ξ è una mappa $s\colon U \to E$ sufficientemente regolare definita su $U \subseteq B$, che manda ogni $b \in U$ in un vettore $\underline{v} \in F_b(\xi)$ nella fibra sopra b, e che è una sezione della proiezione di ξ. Le sezioni di ξ sono raccolte nell'insieme $\Gamma(U,\xi)$. L'assegnazione $U \mapsto \Gamma(U,\xi)$ è un *fascio* di $\mathbb{R}$-moduli.

Si noti che un campo vettoriale su $U \subseteq M$, nelle notazioni appena introdotte, è un elemento di $\Gamma(U,\tau_M) = \Gamma(U, T^1_0(M))$ e una forma differenziale è un elemento di $\Gamma(U,\tau^*(M)) = \Gamma(U, T^0_1(M))$.

Questo fatto ne nasconde uno estremamente più generale.

Definizione 1.7 : *Un* campo di tensori di tipo (s,r) *su una varietà liscia* M *è una sezione liscia del fibrato* $T^r_s(M)$. *Denotiamo con* $\mathfrak{T}^r_s(M)$ *l'insieme* $\Gamma(U, T^r_s(M))$, *riferendosi ad esso come dotato implicitamente della struttura di spazio vettoriale reale.*

Pressoché tutte le definizioni si possono dare senza troppo sforzo. Se $f \in C^\infty(M)$, $t \in \mathfrak{T}^r_s(M)$, definiamo $f \cdot t\colon M \to T^r_s(M)\colon p \mapsto f(p)t(p)$ (questo rende $\mathfrak{T}^r_s(M)$ un C^∞-modulo).

Se $X_1,\dots,X_s$ sono campi vettoriali su M, $\alpha_1,\dots\alpha_r$ sono forme differenziali, e $t' \in \mathfrak{T}^{r'}_{s'}(M)$, definiamo

$$
\begin{aligned}
t(\underline{\alpha},\underline{X})\colon M &\longrightarrow \mathbb{R}\\
p &\longmapsto t(p)(\underline{\alpha}(p),\underline{X}(p))\\
t \otimes t'\colon M &\longrightarrow T^{s+s'}_{r+r'}(M)\\
p &\longmapsto t(p)\otimes t'(p).
\end{aligned}
$$

Vale ovviamente un risultato che riguarda la

Rappresentazione in Coordinate di un Campo Tensoriale. Se $\phi\colon U \to \mathbb{R}^n$ è una carta locale di M, $\phi^{-1}\colon \phi(U) \to U$ la sua inversa, allora $T\phi^{-1}(\underline{e}_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}$ è una base dello spazio tangente visto come spazio di derivazioni; la base duale sullo spazio cotangente è fatta da $\mathrm{d}x_i\colon \mathrm{d}x_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_{ij}$.

L'espressione in coordinate locali di un campo tensoriale t di tipo (s,r) su M è allora data da

$$T|_U = t^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\otimes \mathrm{d}x^{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{i_r} \tag{23}$$

dove $t^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} = t\big(\mathrm{d}x^{i_1},\dots,\mathrm{d}x^{i_r},\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\big) \in C^\infty(M)$.

1.3.2 I fibrati canonico e anticanonico.

Il *fibrato canonico* di una varietà M (algebrica, C^∞, analitica…) si ottiene dalla potenza esterna massima possibile del fibrato cotangente a M, $\bigwedge^n M$; è un fibrato in rette, e si chiama canonico perché si ottiene "senza fare delle scelte" arbitrarie sulla varietà.

In un modo opportuno (e questa è la base da cui parte la K-teoria, in cui non saremo così folli da addentrarsi) si può dare all'insieme delle classi di isomorfismo di fibrati su uno stesso spazio (supponiamolo una varietà liscia a sufficienza) una struttura di *gruppo*, la cui operazione è commutativa e indotta dalla somma di Whitney. In quest'ottica, l'elemento neutro è dato dal fibrato triviale, e l'*inverso* (ci vuole qualche giro di parole per farlo esistere, ma si puo' fare) è dato da un fibrato tale che $E \oplus (-E) \cong M \times \mathbb{R}^n$. Fatti interessanti: condizione sufficiente ad avere un inverso rispetto all'operazione in $K(M)$ è essere un fibrato vettoriale su una base Hausdorff compatta, e (più importante) il prodotto tensoriale di fibrati induce su $K(M)$ una operazione che lo rende un anello commutativo.

1.3.3 Gli spazi dei jets.

Sia M una varietà, e $C^\infty(M)$ l'algebra delle sue funzioni regolari. L'insieme delle sezioni lisce di un fibrato vettoriale su M è in modo naturale un $C^\infty(M)$-modulo; se $p \in M$, chiamiamo $C^{\infty,p}(M)$ il sottospazio di $C^\infty(M)$ fatto dalle f che si annullano in p (questo in effetti è l'ideale massimale dell'anello locale $C^\infty(M)$). Chiamiamo Γ^p il sottospazio di $\Gamma(U, E)$ generato da $C^{\infty,p}(M)$, ossia l'insieme delle sezioni che si scrivono come

$$s = \sum f_i s_i \tag{24}$$

con $f_i(p) = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, r$ e $s_1, \ldots, s_r \in \Gamma(U, E)$ Le s di quella forma possono essere pensate come le sezioni che si annullano in p almeno fino al primo ordine. Definiamo

$$E_p = \Gamma(U, E)/\Gamma^p \tag{25}$$

Chiaramente E_p è uno spazio vettoriale reale: dall'insieme $E = \bigcup E_p = \coprod_{p \in M} E_p = \{(p, v \mid v \in E_p)\}$ si ottiene un fibrato vettoriale, ponendo come mappa di proiezione l'ovvia $E \to M : (p, v) \mapsto p$.

Aver formulato così la questione suggerisce come generalizzare: basta dividere $\gamma(U, E)$ ne sottospazi delle sezioni che si annullano all'ordine r e fare un quoziente. Se Γ^p è definito -sono le sezioni che si annullano "all'ordine zero" in p, ossia tali che $s(p) = 0$, Γ^p_1 sarà composto da quelle che si annullano "al primo ordine" in p, e così via ad ordini più elevati:

- Γ^p_1 è lo spazio delle combinazioni lineari di elementi di $C^\infty(M)\Gamma^p$;
- Γ^p_2 è lo spazio delle combinazioni lineari di elementi di $C^\infty(M)\Gamma^p_1$.
- $\ldots$
- Γ^p_r è lo spazio delle combinazioni lineari di elementi di $C^\infty(M)\Gamma^p_{r-1}$.

Ora, definiamo $J^r(E)_p = \Gamma(M, E)/\Gamma^p_{r-1}$, e $J^r(E) = \coprod_{p \in M} J^r(E)_p$. Questo induce in modo naturale un fibrato vettoriale su M, ponendo come proiezione la mappa

$$\pi^r : J^r(E) \to M : (p, v) \mapsto p \tag{26}$$

$J^r(E)$ è detto spazio dei *jets di ordine* r associati a $\Gamma(U, E)$, ed è (nelle notazioni della sezione 1.2) l'unico fibrato vettoriale su M che ha per fibra sopra p lo spazio $E_p = \Gamma(U, E)/\Gamma^p_0$.

Gli spazi dei jet su M sono essenziali allo studio degli operatori differenziali sulle varietà: se d è un endomorfismo di Γ, e X un endomorfismo di $C^\infty(M)$ compatibile con le sue funzioni di restrizione, e i due sono tali che

$$\begin{aligned} d(fs) &= X(f)s + f \cdot ds \\ X(fg) &= X(f)g + fX(g) \end{aligned} \tag{27}$$

per $f, g \in C^\infty(M)$, $s \in \Gamma(U, E)$, consideriamo $s \in \Gamma(U, E)$ e $f_1, \dots, f_r \in \Gamma^p$. Allora $f_1 \dots f_r s \in \Gamma^p_{r-1}$ (provate): in più

$$d(f_1 \dots f_r s) = \sum_{i=1}^{r} f_1 \dots X(f_i) \dots f_r s + f_1 \dots f_r \cdot ds \tag{28}$$

che è un elemento di Γ^p_{r-2}. Con ciò abbiamo che $d(\Gamma^p_{r-1}) \subseteq \Gamma^p_{r-2}$, per $p \in M$, $r \geq 1$, d mappa come sopra. Dunque, d definisce una mappa tra i due spazi che passa al quoziente ed è lineare:

$$\sigma^p_{r,d} \colon J^r(E)_p \to J^{r-1}(E)_p \tag{29}$$

Al variare di $p \in M$, $\sigma_{r,d}$ definisce una mappa $J^r(E) \to J^{r-1}(E)$ che è lineare fibra per fibra. Supponiamo ora che d sia della forma $d'd''$, con d', d'' operatori $\Gamma(U, E) \to \Gamma(U, E)$ che rispettano le condizioni 1.3.3. Ripetendo due volte un ragionamento analogo a quello sopra, si ottiene l'inclusione $d(\Gamma^p_{r-1}) \subseteq \Gamma^p_{r-3}$, e d passa al quoziente definendo una mappa lineare

$$\sigma^p_{r,d} \colon J^r(E)_p \to J^{r-2}(E)_p \tag{30}$$

Al variare di $p \in M$, $\sigma_{r,d}$ definisce una mappa $J^r(E) \to J^{r-1}(E)$ che è lineare fibra per fibra.

Fatta questa introduzione genrale, lo scopo del resto della sezione è mostrare come il linguaggio dei fibrati dona un modo elegante di parlare di calcolo delle variazioni su una varietà (ed è quindi strumento essenziale allo studio della teoria dei campi classica).

Innanzitutto, è possibile definire gli spazi dei jets anche per fibrati non vettoriali. Non cercheremo eccessivo rigore ma ci limiteremo a dare delle idee generali.

Supponiamo che $E \to M$ sia un fibrato liscio, localmente banale come previsto nella Osservazione 1. Chiamiamo come al solito $\Gamma(E)$ lo spazio delle sue sezioni globali; non essendo le fibre di π dotate di una struttura vettoriale, $\Gamma(E)$ non ha una struttura naturale di spazio vettoriale. Dovremo allora trovare un modo alternativo per definire gli spazi dei jets. Procediamo quindi a definire una relazione di equivalenza su $\Gamma(E)$ e a fare il quoziente.

Moralmente, quello che vogliamo è che $s, s' \in \Gamma(E)$ siano "uguali all'ordine r nel punto p". Questa proprietà è squisitamente locale, perciò possiamo benissimo restringerci ad un intorno banalizzante U per cui $\pi^{\leftarrow}(U) \cong M \times E_p$: in questo scenario una sezione è univocamente determinata da come si comporta sulla fibra, ossia è una mappa $\mathrm{id} \times \alpha \colon M \to E_p \colon x \in U \mapsto (x, \alpha(x))$.

Questo apre la strada alla giusta definizione:

> Diciamo che due sezioni s, s' sono uguali all'ordine r nel punto p se e solo se le mappe α, α' che le definiscono sono tali che
>
> - $\alpha(p) = \alpha'(p)$;
> - In una (e quindi in tutte) le coordinatizzazioni locali di E_p le derivate parziali di α e α' coincidono in p fino all'ordine r: questo si scrive in modo un po' ingarbugliato usando i multiindici, quindi è un ottimo, noioso, esercizio.

Va verificato che la definizione data non dipende dalla trivializzazione scelta (e quindi dalle coordinatizzazioni possibili su $\pi^{\leftarrow}(U)$: questo implica che "essere uguali fino all'ordine r in p" è una relazione di equivalenza in $\Gamma(E)$ che chiamiamo $\sim_{r,p}$. L'insieme quoziente $\Gamma(E)/\sim_{r,p}$ è quello che chiamiamo *spazio degli r-jets* in p, e che indichiamo con $J^r(E)_p$.

Sorge spontanea la domanda: $\coprod_{p\in M} J^r(E)_p$ si può rendere in qualche modo lo spazio totale di un fibrato su M (la proiezione sarà definita come al solito)?

La risposta è sì: prendiamo in considerazione l'insieme $J^r(E) = \Gamma(E) \times M$, quozientato per la relazione che identifica $(s,p),(s',p')$ se e solo se $p = p'$ e $s \sim_{r,p} s'$. L'insieme quoziente $J/\sim_{r,p}$ è lo spazio totale di un fibrato, le cui fibre sono esattamente $J^r(E)_p$ se la proiezione $\pi^r \colon J^r(E) \to M$ è definita da $(s,p) \mapsto p$.

Osservazione 5 : *Se $r' < r$ esiste una mappa $J^r(E) \to J^{r'}(E)$, per l'ovvio motivo che se s, s' coincidono fino all'ordine r, coincidono in particolare fino all'ordine r'.*

Ora che abbiamo reso $J^r(E) \to M$ un fibrato, consideriamo l'insieme $\Gamma(J^r(E), M)$ delle sue sezioni globali. Si osservi che esiste una mappa canonica

$$\begin{aligned} j^r \colon \Gamma(E) &\longrightarrow \Gamma(J^r(E)) \\ s &\longmapsto j^r(s) \colon p \mapsto [(s,p)] \end{aligned} \tag{31}$$

dove $[(s,p)]$ è la classe di equivalenza rispetto a $\sim_{r,p}$.

Legami col calcolo delle variazioni. Spieghiamo ora l'applicazione promessa: se $\pi \colon E \to M$ è un fibrato (anche non vettoriale, ma sempre liscio) e $r \geq 1$ è un intero, definiamo una *lagrangiana di ordine r* come una funzione regolare su $J^r(E)$, che denotiamo con la lettera $\mathcal{L}$.

Per evitare problemi supponiamo che lo spazio di base sia una varietà orientabile e compatta, in modo che possieda una forma volume $\mathrm{d}\mu$ e che abbia senso integrare $\int_M \mathrm{d}\mu$ e ogni funzione $f \in C^\infty(M)$ mediante $\int_M f\mathrm{d}\mu$. In particolare, per una lagrangiana $\mathcal{L}$ denotiamo con $\mathbf{L}$ la mappa

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \colon \Gamma(E) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto \int_M \mathcal{L}(j^r(s)_p)\mathrm{d}\mu \end{aligned} \tag{32}$$

In poche parole il compito del calcolo delle variazioni è di studiare le proprietà di $\mathbf{L}$ quando viene valutata su curve in $\Gamma(E)$. Il problema classico del calcolo delle variazioni è in particolare quello di studiare la "variazione all'ordine 1"

$$\frac{d}{d\lambda}\mathbf{L}(s(\lambda))\Big|_{\lambda=0} \tag{33}$$

$\lambda \mapsto s(\lambda)$ essendo una curva sufficientemente regolare in $\Gamma(E)$. Sepolto sotto la questione c'è un certo operatore differenziale, detto *di Eulero–Lagrange*, che in generale è complicato da determinare.

Restringiamo quindi il campo di lavoro e supponiamo che

- $r = 1$;
- $E \to M$ sia il fibrato banale;
- M abbia coordinate $(x^i) = x$.

Ogni elemento di $\Gamma(E)$ si scriverà allora in modo unico come funzioni $\varphi = (\varphi^a(x^i))$ (anche a sono indici).

Un sistema di coordinate su $J^1(E)$ è determinato dalla posizione

$$\varphi_{ai} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial x_i} \tag{34}$$

(precisamente, $(x^i, \varphi^a, \varphi^{ai})$ sono coordinate su $J^1(E)$.)

Ora, una funzione $\mathcal{L}\colon J^1(E) \to \mathbb{R}$ verrà detta *lagrangiana*, e sarà rappresentata da una funzione

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x^i, \varphi^a, \varphi_{ai}) \tag{35}$$

delle variabili suddette. A questo punto però la $\mathbf{L}$ definita sopra acquista una forma che dovrebbe essere nota a molti:

$$\mathbf{L}\colon s \mapsto \int_M \mathcal{L}(x, \varphi(x), \partial\varphi(x))\mathrm{d}\mu \tag{36}$$

(o in coordinate $s \mapsto \int_M \mathcal{L}(x^i, \varphi^a, \varphi_{ai})\mathrm{d}\mu$). Con queste notazioni fissate una volta per tutte, calcoliamo $\frac{d}{d\lambda}\mathbf{L}(s(\lambda))\big|_{\lambda=0}$: se $\lambda \mapsto s(\lambda) = (\varphi^a_\lambda(x))$ è una curva in $\Gamma(E)$, poniamo

$$\delta_a(x) = \frac{d}{d\lambda}\varphi^a_\lambda(x)\Big|_{\lambda=0}$$
$$L_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^a}; \qquad L_{ai}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{ai}}$$

Allora

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda}\mathcal{L}(s(\lambda))\Big|_{\lambda=0} &= \frac{d}{d\lambda}\int_M \mathcal{L}(x, \varphi_\lambda(x), \partial\varphi_\lambda(x))\mathrm{d}\mu\Big|_{\lambda=0} \\ &= \int_M \big[L_a(x, \varphi(x), \partial\varphi(x))\delta_a(x)\big]\mathrm{d}\mu \\ &+ \int_M L_{ai}(x, \varphi(x), \partial\varphi(x))\partial_i\delta_a(x)\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

Se ora supponiamo che δ_a sia a supporto compatto e integriamo opportunamente per parti siamo rimasti con

$$\int_M \Big[L_a(x, \varphi(x), \partial\varphi(x)) - \partial_i L_{ai}(x, \varphi(x), \partial\varphi(x))\Big]\delta_a(x)\mathrm{d}\mu \tag{37}$$

che “ricorda molto da vicino” le equazioni di Lagrange. □

2 Connessioni Affini.

Sia $E \xrightarrow{p} M$ un fibrato di rango k su una varietà liscia M (che dovremo supporre a un certo punto paracompatta).

PROPOSIZIONE 2.1 : *Le sezioni del fibrato $\wedge^r T^*M \otimes E$ si possono pensare come r-forme a valori in E.*

Proof. Dato $U \subseteq M$ aperto banalizzante sia per (E, p) che per $(\wedge^r T^*M, \pi)$ (basta prendere l'intersezione di due aperti banalizzanti attorno a $x \in M$), ogni sezione locale $\xi \in \Gamma(U, \wedge^r T^*M \otimes E)$ si scrive

$$\xi = \sum_I \sum_j \xi_I^j \sigma_j \otimes \mathrm{d}x_I. \tag{38}$$

Si può dunque identificare ξ al vettore di r-forme $(\xi^1, \dots, \xi^k)$, dove

$$\xi^m = \sum_I \xi_I^m \sigma_m \otimes \mathrm{d}x_I = (\sum_I \xi_I^m \mathrm{d}x_I) \otimes \sigma_m. \tag{39}$$

□

Definiamo allora

$$\Omega^r(U, E) := \Gamma(U, \wedge^r T^*M \otimes E) \tag{40}$$

(si noti che $\Omega^r(U, E)$ è in modo naturale un C^∞-modulo). Direttamente dalla definizione segue che $\Omega^0(U, E) = \Gamma(U, \mathbb{R} \otimes E) \cong \Gamma(U, E)$ e $\Omega^1(U, E) = \Gamma(U, T^*M \otimes E)$: in particolare il primo è il fascio delle sezioni globali quando $U = M$.

Definizione 2.1 : *Una* connessione lineare *su un fibrato $E \xrightarrow{p} M$ è una applicazione lineare*

$$D\colon \Omega^0(M, E) \to \Omega^1(M, E) \tag{41}$$

tale che $D(f\sigma + \tau) = \mathrm{d}f \otimes \sigma + fD(\sigma) + D\tau$, per ogni $f \in C^\infty(M)$, $\sigma, \tau \in \Omega^0(M, E)$.

Osservazione 6 : *Una connessione lineare è un* operatore locale*, nel senso che è compatibile con le restrizioni del fascio $\Omega^r(-, E)$: il diagramma*

$$\begin{tikzcd} \Omega^0(M) \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\rho^0"'] & \Omega^1(M) \arrow[d, "\rho^1"] \\ \Omega^0(U) \arrow[r, "D|U"'] & \Omega^1(U) \end{tikzcd} \tag{42}$$

è dunque commutativo.

Esempio 2.1 [Differenziale di Cartan]: *Sul fibrato banale $E = \mathbb{R} \times M \to M$ c'è sempre la connessione data dall'usuale differenziale,*

$$\mathrm{d}(f_1, \dots, f_k) = (\mathrm{d}f_1, \dots, \mathrm{d}f_k) \tag{43}$$

Si può definire più in generale sul fibrato banale di rango k, $E = \mathbb{R}^k \times M \to M$.

La definizione di connessione nasce precisamente per definire un'estensione del differenziale di Cartan a un fibrato non banale.

Più in generale, data una matrice $k \times k$, diciamo ω, possiamo definire una connessione d_A sullo spazio totale E come

$$d_A \underline{\sigma} = \mathrm{d}\underline{\sigma} + \omega \underline{\sigma} \tag{44}$$

dove si è indicato $\underline{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ e $\mathrm{d}\sigma = (\mathrm{d}\sigma_1, \dots, \mathrm{d}\sigma_k)$; in breve si indica con $d_A = \mathrm{d} + \omega$.

Si verifica che

$$\begin{aligned}
d_A(f\underline{\sigma}+\underline{\tau}) &= (\mathrm{d}+\omega)(f\underline{\sigma}+\underline{\tau})\\
&= \mathrm{d}(f\underline{\sigma}+\underline{\tau})+\omega(f\underline{\sigma}+\underline{\tau})\\
&= \mathrm{d}f\otimes\underline{\sigma}+f\mathrm{d}\underline{\sigma}+\mathrm{d}\underline{\tau}+f\omega\underline{\sigma}+\omega\underline{\tau}\\
&= \mathrm{d}f\otimes\underline{\sigma}+f(\mathrm{d}+\omega)\underline{\sigma}+(\mathrm{d}+\omega)\underline{\tau}\\
&= \mathrm{d}f\otimes\underline{\sigma}+(d_A\underline{\sigma})+d_A\underline{\tau}
\end{aligned}$$

Studiandola a livello locale, ci si accorge che ogni connessione d_A si scrive localmente nella forma $\mathrm{d}+\omega$, dove ω è una opportuna matrice di 1-forme.

Proof. Sia come prima U un aperto che banalizzi allo stesso tempo E e $\wedge^1 T^*M \cong T^*M$. Sia poi $\{\sigma_1,\dots,\sigma_k\}$ una base di sezioni locali, e D una assegnata connessione su E.

Ogni sezione $s\in\Gamma(U,E)$ si scrive come $s=s^i\sigma_i$, dunque

$$Ds = D(s^i\sigma_i) = \mathrm{d}s^i\otimes\sigma_i + s^i D\sigma_i \tag{45}$$

A questo punto, siccome U banalizza $E\otimes T^*M$, $D\sigma_i$ deve potersi scrivere come $\theta_{ij}\otimes\sigma_j$, θ_{ij} essendo una 1-forma su U, per ogni coppia di indici. Allora

$$Ds = (\mathrm{d}s^j + s^i\theta_{ij})\otimes\sigma_j \tag{46}$$

scrittura che in forma contratta si rappresenta come $D\underline{s}=(\mathrm{d}+\underline{\theta})\underline{s}$, intendendo con $\underline{s}$ il vettore $(s^1\dots s^k)$, $\underline{\theta}=(\theta_{ij})$. □

Definizione 2.2 : *La matrice $\underline{\theta}$ ora determinata è detta* matrice della connessione D.

Il criterio di tensorialità. Per procedere nella esposizione serve una digressione sul cosiddetto *criterio di tensorialità*.

Dati due fibrati $E,E'\to B$ su una stessa base, che assumiamo essere una varietà C^∞, definiamo per prima cosa il fibrato $\hom(E,E')$ come $E^*\otimes E'$, di funzioni di transizione $g_{ij}^{-t}\otimes g'_{ij}$.

Vorremmo dimostrare alcune relazioni che legano tra loro $\Gamma(M,E\otimes E')$ a $\Gamma(M,E)$ e a $\Gamma(M,E')$, e $\Gamma(M,E^*)$ a $\Gamma(M,E)^*$. Per farlo ci serviamo di alcune proprietà del (pre)fascio delle sezioni di $E\to M$; in particolare osserviamo che su aperti abbastanza piccoli da banalizzare E ed E' ogni sezione $s=s_U$ di $E\otimes E'$ si scrive come una somma $\sum_k f_k^U\otimes g_k^U$ per opportune $f^U,g^U\in C^\infty(U)$. Scelta una partizione dell'unità $\{\phi_U\}_U$ subordinata a un ricoprimento di aperti banalizzanti, notiamo che la sezione s su U si scrive

$$s = s\cdot 1 = s\textstyle\sum_U\phi_U = \sum_U(s\phi_U) = \sum_U\sigma_U \tag{47}$$

dove $\sigma_U\in\Gamma(U,E\otimes E')$. A questo punto ognuna delle σ_U si scrive come sopra, $\sigma_U=\sum_k f_k^U\otimes g_k^U$, in modo che $s=\sum_{U,k}f_k^U\otimes g_k^U$. La sezione s determina allora in modo univoco un elemento di $\Gamma(M,E)\otimes_{C^\infty}\Gamma(M,E')$, porgendo così un isomorfismo

$$\Gamma(M,E\otimes E')\cong\Gamma(M,E)\otimes_{C^\infty}\Gamma(M,E'). \tag{48}$$

Operando in modo simile si ricava un isomorfismo

$$\Gamma(M,E^*)\cong\Gamma(M,E)^* \tag{49}$$

che implica (ed è implicato dal)l'esistenza di una dualità canonica $\Gamma(M,E)\otimes_{C^\infty}\Gamma(M,E^*)\to C^\infty(M)$ tra i C^∞-moduli $\Gamma(M,E)$ e $\Gamma(M,E^*)$.

Alla luce di tutto questo vale il seguente

TEOREMA 2.1 : *Siano E, E' fibrati vettoriali su una stessa base M, varietà C^∞. Allora esiste un isomorfismo di spazi vettoriali, naturale nei suoi argomenti, tra $\Gamma(M, E^* \otimes E')$ e $\hom_{C^\infty}(\Gamma(M,E), \Gamma(M,E'))$.*

In particolare, $\tau \in \Gamma(M, E^* \otimes E') \mapsto f_\tau(\alpha)_p = \langle \tau, \alpha \rangle(p)$, per ogni $\alpha \in \Gamma(M, E)$, $p \in M$.

Proof. Abbiamo la catena di isomorfismi

$$\Gamma(M, E^* \otimes E') \cong \Gamma(M, E^*) \otimes_{C^\infty} \Gamma(M, E') \cong \hom_{C^\infty}(\Gamma(M,E), \Gamma(M,E')), \quad (50)$$

tutti giustificati dalla osservazione precedente. □

OSSERVAZIONE 7 : *Questo principio ha molte applicazioni che emergeranno durante la discussione. Esso stabilisce una biiezione*

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{sezioni globali} \\ \text{di fibrati su } M \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{mappe di } C^\infty\text{-moduli} \\ \text{tra sezioni di } E \text{ e di } E' \end{array} \right\}$$

secondo la quale ogni campo tensoriale su $E^* \otimes E$ si può riguardare come una mappa tra gli spazi delle sezioni.

LEMMA 2.1 : *Se D, D' sono due connessioni su E, la differenza $D - D'$ è un omomorfismo di $C^\infty(M)$-moduli $\Omega^0(M,E) \to \Omega^1(M,E)$.*

Proof. Valutiamo $D - D'$ su $f\underline{s}$.

$$(D - D')f\underline{s} = \mathrm{d}f \otimes \underline{s} + fD\underline{s} - \mathrm{d}f \otimes \underline{s} - fD'\underline{s} = f(D - D')\underline{s} \quad (51)$$

per ogni $f \in C^\infty(M)$, $s \in \Omega^0(M,E)$. □

Il criterio di tensorialità enunciato sopra dice allora che la differenza $D - D'$ determina univocamente una sezione del fibrato $E^* \otimes E \otimes \wedge^1 T^*M$, ossia un elemento di $\Omega^1(M, \mathrm{End}(E))$.

Localmente, $D = \mathrm{d} + \underline{\theta}$, $D' = \mathrm{d} + \underline{\theta}'$, dunque $D - D'$ è una matrice di 1-forme. Da ciò segue quasi subito la seguente considerazione:

PROPOSIZIONE 2.2 : *L'insieme $\mathcal{D}_E$ di tutte le connessioni su E è uno spazio affine su $\Omega^1(M, End(E))$.*

Proof. Basta mostrare che su E esiste almeno una connessione D: grazie al lemma precedente ogni altra connessione si ottiene facendo operare il gruppo abeliano $\Omega^1(M, \mathrm{End}(E))$ "per traslazione", il che conclude la prova.

Si deve ipotizzare qui che M sia almeno paracompatto, in modo da garantire l'esistenza di una partizione dell'unità subordinata ad un suo ricoprimento di aperti banalizzanti. Ciò assicurato, chiamiamo $\{U_\alpha\}$ il ricoprimento e $\{\phi_\alpha\}$ la partizione associata. Allora porre

$$D = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \phi_\alpha D_\alpha \quad (52)$$

ove D_α è la connessione indotta dal differenziale di Cartan sul fibrato $E|_{U_\alpha} \cong \underline{\mathbb{R}}^k$, è una connessione su E; infatti

$$\begin{aligned} D(f\underline{s}) &= \Big(\sum \phi_\alpha D_\alpha\Big) f\underline{s} \\ &= \sum \phi_\alpha(x) D_\alpha(f\underline{s})(x) \\ &= \sum \phi_\alpha(x)(\mathrm{d}f \otimes \underline{s}) + \sum \phi_\alpha f D_\alpha \underline{s} \\ &= 1 \cdot \mathrm{d}f \otimes \underline{s} + f\Big(\sum \phi_\alpha D_\alpha\Big)\underline{s} \end{aligned}$$

Si noti, a margine, che D *dipende fortemente* dalla partizione dell'unità scelta. $\square$

OSSERVAZIONE 8 : *Un fibrato qualsiasi* non *possiede una connessione canonica, come avviene per il fibrato banale e per la connessione di Cartan. Per avere una connessione definia in modo intrinseco, ci si dovrà appoggiare a delle strutture aggiuntive sovraimposte al fibrato (per esempio una metrica riemanniana).*

La connessione D induce naturalmente dei "differenziali" $d_D : \Omega^r(M,E) \to \Omega^{r+1}(M,E)$ per ogni $1 \leq r \leq k$, univocamente determinati dalle proprietà

- $d_D = D$ al grado zero;
- $d_D(\omega \wedge \xi) = \mathrm{d}\omega \wedge \xi + (-1)^p \omega \wedge d_D \xi$ er ogni $\omega \in \Omega^p(M)$, $\xi \in \Omega^p(M,E)$.

OSSERVAZIONE 9 : *Non è in generale vero che $d_D \circ d_D = 0$, dunque in generale d_D non è il codifferenziale di un complesso di cocatene: per esempio, sia $D = \mathrm{d} + \theta$ una connessione sul fibrato banale in rette $\mathbb{R}$. Allora*

$$d_D\omega = \mathrm{d}\omega + \theta \wedge \omega \tag{53}$$

(il prodotto tra una matrice di 1-forme e un vettore di r-forme si fa prendendo la forma che al posto j ha $\sum_i \theta_{ji}\omega_i$). In tal caso

$$\begin{aligned}(d_D \circ d_D)f &= \mathrm{d}(\mathrm{d}f + f\theta) + \theta \wedge (\mathrm{d}f + f\theta) \\ &= \mathrm{d}^2 f + \mathrm{d}(f\theta) + \theta \wedge \mathrm{d}f + f(\theta \wedge \theta) \\ &= f\mathrm{d}\theta + \mathrm{d}f \wedge \theta + \theta \wedge \mathrm{d}f \\ &= f\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

e dunque se θ non è chiusa, $(d_D \circ d_D) \neq 0$.

Va tuttavia osservato che per ogni connessione D su E, $d_D \circ d_D$ definisce un omomorfismo C^∞-lineare, come si osserva dal conto

$$\begin{aligned}(d_D \circ d_D)(fs) &= d_D(\mathrm{d}f \otimes s + f d_D s) \\ &= d_D(\mathrm{d}f \otimes s) + d_D(f d_D s) \\ &= \mathrm{d}^2 f \otimes s - \mathrm{d}f \wedge d_D s + \mathrm{d}f \wedge d_D s + f(d_D \circ d_D)s \\ &= f(d_D \circ d_D)s\end{aligned}$$

$d_D \circ d_D$ individua quindi, per il criterio di tensorialità (v. Esercizio 4), una sezione globale di $\Omega^2(M, \mathrm{End}(E))$, chiamata *curvatura della connessione* e indicata con F_D.

Localmente, la curvatura si rappresenta in termini di una matrice di 2-forme detta *matrice di curvatura* della connessione; su un aperto banalizzante si ha

$$\begin{aligned}(d_D \circ d_D)s &= (\mathrm{d} + \theta) \circ (\mathrm{d} + \theta)s \\ &= \mathrm{d}(\mathrm{d}s + \theta s) + \theta \wedge (\mathrm{d}s + \theta s) \\ &= \mathrm{d}(\theta s) + \theta \wedge \mathrm{d}s + (\theta \wedge \theta)s \\ &= (\mathrm{d}\theta)s - \theta \wedge \mathrm{d}s + \theta \wedge \mathrm{d}s + (\theta \wedge \theta)s \\ &= \big(\mathrm{d}\theta + \theta \wedge \theta\big)s \\ &=: \Theta s\end{aligned}$$

(si noti che $\theta \wedge \theta \neq 0$ perché ha per componente ij la somma $\sum_l \theta_{il} \wedge \theta_{lj}$).

ESERCIZIO 4 : *Si trovi come cambia la curvatura di D con un cambio di coordinate e si deduca che si tratta di una quantità tensoriale.*

Connessione indotta su End(E) e identità di Bianchi. Una connessione D su E ne induce naturalmente una sul fibrato End(E) con la posizione

$$\hat{D} \colon \Omega^0(M, \mathrm{End}(E)) \to \Omega^1(M, \mathrm{End}(E)) \tag{54}$$

definita da $(\hat{D}L)s = D(Ls) - L(Ds)$ per ogni $L \in \Omega^0(M, \mathrm{End}(E))$ che manda $p \in M$ in $L_p \colon E \to E$ morfismo di fibrati. È facile verificare che questa posizione rende $\hat{D}$ una connessione:

$$\begin{aligned}(\hat{D}(fL))s &= D(fLs) - fL(Ds)\\ &= \mathrm{d}f \otimes Ls + f(D(Ls) - L(Ds))\\ &= \mathrm{d}f \otimes Ls + f(\hat{D}L)s\end{aligned}$$

per ogni $f \in C^\infty(M)$, $s \in \Omega^0(M, E)$, $L \in \Omega^0(M, \mathrm{End}(E))$. Da ciò si deduce la presenza di derivazioni in ogni grado

$$\hat{d}_D := d_{\hat{D}} \colon \Omega^r(M, \mathrm{End}(E)) \to \Omega^{r+1}(M, \mathrm{End}(E)) \tag{55}$$

Teorema 2.2 [Identità di Bianchi]: *Se F_D è la curvatura di una connessione D su E, allora*

$$\hat{d}_D F_D = 0 \tag{56}$$

Proof. Localmente si ha $d_D = \mathrm{d} + \theta$ e $F_D = \Theta$. Dunque

$$\begin{aligned}\hat{d}_D s &= d_D(\Theta s) - \Theta \wedge d_D s\\ &= \mathrm{d}(\Theta s) + \theta \wedge \Theta s - \Theta \wedge (d_D s)\\ &= (\mathrm{d}\Theta)s + \Theta \wedge \mathrm{d}s + (\theta \wedge \Theta)s - \Theta \wedge \mathrm{d}s - (\Theta \wedge \theta)s\\ &= \big(\mathrm{d}\Theta + [\theta, \Theta]\big)s\end{aligned}$$

D'altra parte vale

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Theta &= \mathrm{d}(\mathrm{d}\theta + \theta \wedge \theta)\\ &= \mathrm{d}^2\theta + \mathrm{d}\theta \wedge \theta - \theta \wedge \mathrm{d}\theta\\ &= (\Theta - \theta \wedge \theta) \wedge \theta - \theta \wedge (\Theta - \theta \wedge \theta)\\ &= \Theta \wedge \theta - \theta \wedge \Theta = [\Theta, \theta].\end{aligned}$$

Dunque $(\hat{d}_D \Theta)s = 0$, per ogni $s \in \Gamma(U, E)$. □

Derivata Covariante. Deduciamo da quanto esposto finora la nozione di *derivata covariante* di una sezione lungo un campo. Sia M una varietà liscia, ed $E \to M$ un fibrato su M. Si osservi innanzitutto che c'è una dualità

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \Gamma(M, TM) \otimes \Omega^1(M, E) \to \Omega^0(M, E) \tag{57}$$

(perché ce n'è una $\Gamma(M, TM) \to \Omega^1(M)$). Allora, se D è una connessione su E, per ogni campo vettoriale $X \in \Gamma(M, TM)$, e ogni sezione $s \in \Omega^0(M, E)$, la quantità

$$\nabla_X s := \langle X, Ds \rangle \in \Omega^0(M, E) \tag{58}$$

si dice *derivata covariante di s lungo X rispetto a D.*

Localmente, su un aperto $U \subseteq M$ banalizzante e contenuto in un dominio di carta per M, possiamo scrivere

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad \theta_{ij} = \lambda^i_{jl} \mathrm{d}x^l \tag{59}$$

Perciò per ogni sezione $s = s^i \sigma_i \in \Omega^0(U, E)$ si ha

$$\begin{aligned}\nabla_X s &= \langle X, (\mathrm{d}s^i + (\lambda^i_{jl}\mathrm{d}x^l)s^j)\sigma_i\rangle \\ &= \langle X, \mathrm{d}s^i\sigma_i\rangle + \langle X, \lambda^i_{jl}\mathrm{d}x^l s^j\sigma_i\rangle \\ &= \left[X(s_i) + s^j X^l \lambda^i_{jl}\right]\sigma_i\end{aligned}$$

Le funzioni λ^i_{jl} sono chiamate *simboli di Christoffel* della connessione. Il resto della nota è teso a delineare alcune delle loro proprietà, e verte a dimostrare due risultati essenziali della geometria differenziale classica:

- L'esistenza di un *trasporto parallelo* sulla varietà M, che caratterizza in modo puramente geometrico le connessioni definite sul suo fibrato tangente;
- Il *teorema fondamentale della geometria riemanniana*, che asserisce che sul fibrato tangente ad una varietà riemanniana (M, g) esiste un'unica connessione simmetrica, ossia tale che $\lambda^i_{jl} = \lambda^i_{lj}$, e g-metrica, ossia tale che $Dg = 0$.

Sia allora nel seguito M una varietà liscia, TM (lo spazio totale de)il suo fibrato tangente.

Si rammenti che le sezioni lisce di $TM \to M$ sono i *campi vettoriali* su M. Una connessione lineare in tale contesto diviene allora una applicazione lineare

$$D\colon \Gamma(M, TM) \to \Omega^1(M, TM) = \Gamma(TM \otimes \wedge^1 T^*M, M) \tag{60}$$

tale che $D(f \cdot X) = \mathrm{d}f \otimes X + f \cdot DX$ per ogni $f \in C^\infty(M)$ e $X \in \Gamma(M, TM)$. La derivata covariante rispetto a D, lungo un campo X, di un campo Y, è allora definita da

$$D_X Y = \langle X, DY\rangle \tag{61}$$

Il criterio di tensorialità implica, ora, che $D_{(-)}Y\colon X \mapsto D_X Y$ individua una sezione di $TM \otimes T^*M$, ossia è un campo tensoriale di tipo $(1,1)$. Se per esempio $M = \mathbb{R}^n$, scelte coordinate cartesiane standard $(x_1, \dots, x_n)$ e due campi vettoriali $X = X^i \frac{\partial}{\partial x_i}, Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ si ha

$$D_X Y = X(Y^i)\frac{\partial}{\partial x_i} = X^j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{62}$$

Su una varietà M generica, all'intorno di un aperto di carta che banalizzi TM con coordinate $(x_1, \dots, x_n)$, sappiamo che nelle stesse notazioni la derivata covariante si scrive

$$D_X Y = \left(X(Y^i) + \lambda^i_{jl} Y^j X^l\right)\frac{\partial}{\partial x_i} = \left(X^j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} + \lambda^i_{jl} Y^j X^l\right)\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{63}$$

I coefficienti λ^i_{jl} sono meglio noti come *simboli di Christoffel* della varietà, sono solitamente indicati con la lettera Γ in modo che $\lambda^i_{jl} = \Gamma^i_{lj}$ (l'inversione degli indici in basso non è un errore) e sono univocamente determinati (anche se non sempre facilmente calcolabili) dalla relazione

$$D_{E_j} E_l = \Gamma^i_{jl} \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{64}$$

E_k essendo il campo vettoriale di base $\frac{\partial}{\partial x_k}$.

Esercizio 5 : *Si deduca come cambiano i simboli di Christoffel sotto un cambio di coordinate, e si concluda che non sono quantità tensoriali ("non trasformano" nel modo giusto). Deve essere*

$$(\Gamma')^m_{ki} = \frac{\partial y_m}{\partial x_n}\left(\Gamma^n_{lj}\frac{\partial x_i}{\partial y_k}\frac{\partial x_j}{\partial y_i} - \frac{\partial^2 x_m}{\partial y_k \partial y_i}\right) \tag{65}$$

se $x \leftrightarrow y$ sono due sistemi di coordinate, e $\frac{\partial x}{\partial y}$, $\frac{\partial y}{\partial x}$ le jacobiane rispettive.

Definizione 2.3 [Torsione di una Connessione]: *Data una connessione D su TM, la sua* torsione *è il campo tensoriale di tipo $(2,1)$ definito da*

$$\mathcal{T}(X,Y) = D_X Y - D_Y X - [X,Y]. \tag{66}$$

Si osservi che $\mathcal{T}$ definisce effettivamente una quantità tensoriale, perché è C^∞-lineare nei due argomenti. Da questo, e dal fatto che $\mathcal{T}(Y,X) = -\mathcal{T}(X,Y)$ si deduce che la torsione corrisponde ad una sezione del fibrato $TM \otimes \wedge^2 T^*M$, e che in coordinate locali $T^l_{kj} = \Gamma^l_{[kj]} = \Gamma^l_{kj} - \Gamma^l_{jk}$ (si calcoli $\mathcal{T}(-,-)$ sui campi vettoriali di base $\frac{\partial}{\partial x_k}$, $\frac{\partial}{\partial x_j}$, la componente l-esima è proprio quella).

Definizione 2.4 [Simmetria di una Connessione]: *Una connessione D su TM si dice* simmetrica *se la sua torsione è nulla. Equivalentemente, D è simmetrica se e solo se i coefficienti di Christoffel di M sono simmetrici negli indici bassi.*

Definizione 2.5 [g-metricità]: *Sia (M,g) una varietà riemanniana, TM il suo fibrato tangente. Una connessione D su TM si dice* g-metrica *se $Dg = 0$.*

Dalla definizione di derivata covariante segue che D è g-metrica se e solo se

$$D_X(g(Y,Z)) = g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z) \tag{67}$$

Infatti $(D_X g)(Y,Z) = D_X(g(Y,Z)) - g(D_X Y, Z) - g(Y, D_X Z)$, come segue dal fatto che in coordinate locali opportune

$$D_X g = \big(X(g_{ij}) - X^k g_{lj}\Gamma^l_{ki} - X^k g_{il}\Gamma^l_{kj}\big)\mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_j. \tag{68}$$

Teorema 2.3 [Teorema fondamentale della Geometria Riemanniana]: *Sia (Mg) una metrica riemanniana sulla varietà M (se M è paracompatta ne esiste sempre almeno una, Teorema di Whitney). Sul fibrato tangente a M esiste un'unica connessione simmetrica e g-metrica.*

Proof. Una connessione è univocamente determinata dai suoi simboli di Christoffel, come mostra l'identità trovata in coordinate locali. Imponendo la g-metricità si ottiene la condizione

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = g_{lj}\Gamma^l_{ki} + g_{il}\Gamma^l_{kj} \tag{69}$$

Ora, se la connessione è simmetrica, e grazie al fatto che $g_{ij} = g_{ji}$ scriviamo

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} = 2 g_{lk}\Gamma^l_{ij} \tag{70}$$

Questo propone direttamente una relazione sui coefficienti di Christoffel, che li esprime in termini della sola metrica:

$$\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2} g^{lk}\Big(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j}\Big). \tag{71}$$

□

La connessione definita al passo precedente si dice *connessione di Levi-Civita* associata alla metrica g. Si usa indicare i suoi simboli di Christoffel (specie in vetusti libri di Teoria della Relatività Generale) con la notazione $\left\{ {l \atop ij} \right\}$.

DEFINIZIONE 2.6 [CURVATURA]: *La curvatura della connessione di Levi-Civita è una sezione di $\wedge^2 T^*M \otimes$ End(TM); essa individua quindi univocamente un tensore di tipo $(1,3)$, che si chiama* tensore di curvatura *della varietà riemanniana (M,g).*

ESERCIZIO 6 : *Si dimostri che il tensore di curvatura di (M,g) è invariante sotto isometrie.*

ESERCIZIO 7 : *Si dimostri che il tensore di curvatura, in coordinate locali, si scrive come una quantità R^i_{jkl}, che soddisfa alla relazione*

$$\mathrm{d}\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j = \frac{1}{2} R^i_{jkl} \mathrm{d}x^k \wedge \mathrm{d}x^l \tag{72}$$

dove $\omega^i_j = \left\{ {l \atop ij} \right\}$, ed è da essa univocamente determinato. Si trovi che

$$\begin{aligned} R_{ij,kl} = g_{im} R^m_{jkl} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x_i \partial x_l} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x_j \partial x_k} \Big) + \\ + g_{pq} \Big(\left\{ {p \atop il} \right\} \left\{ {q \atop jk} \right\} - \left\{ {p \atop ik} \right\} \left\{ {q \atop jl} \right\} \Big) \end{aligned} \tag{73}$$

e si deduca che valgono le proprietà

- ${R_{\mu\nu\alpha}}^\beta = {R_{[\mu\nu]\alpha}}^\beta$ *(*antisimmetria nei primi due indici*);*
- $R_{\mu\nu\alpha\beta} = {R_{\mu\nu\alpha}}^\rho g_{\rho\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}$*;*
- $R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{[\mu\nu][\alpha\beta]}$*;*
- ${R_{[\mu\nu\alpha]}}^\beta = 0$ *(*prima identità di Bianchi*);*
- $\nabla_{[\lambda} {R_{\mu\nu]\alpha}}^\beta = 0$ *(*seconda identità di Bianchi*).*