



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

TESI MAGISTRALE

**IL TEOREMA
DI RICOSTRUZIONE
DI ORLOV**

Relatore:
CH.MO PROF.
FRANCESCO BOTTACIN

Laureando:
FOSCO LOREGIAN
Matricola: 1019012

Anno Accademico 2011-2012

Introduzione.

LA NOZIONE di categoria derivata risale al lavoro sulla *coomologia étale* degli schemi che Grothendieck ha portato a termine negli anni '60: questi lasciò al suo studente Jean-Louis Verdier il compito di formalizzare le sue intuizioni iniziali. Queste apparvero sparse in una serie di articoli (quelli che poi sarebbero diventati SGA⁴/₂ (Cohomologie étale), ma che furono ripudiati da Grothendieck come parte della collana dei *Séminaires*), e raccolti nella tesi di dottorato (o per meglio dire, la *thèse d'état*) di Verdier [Ver], pubblicata postuma nel 1996 nella collana *Astérisque* dalla *Société Mathématique de France*.

È impossibile negare che l'origine di queste idee risalga alla teoria dell'omotopia, e alla Topologia Algebrica in generale. Ma l'algebra omologica era in quel periodo anche lo strumento base della "rivoluzione" attuata da Grothendieck e dalla sua scuola nel campo della Geometria Algebrica: il lavoro di Serre *Faisceaux Algébriques Cohérents* (1955) aveva fatto scoprire la teoria dei fasci (e conseguentemente della loro coomologia) come una tecnica principe di indagine algebro-geometrica, e il famoso articolo di Grothendieck *Sur quelques points d'algèbre homologique* pubblicato da Tohoku, che gli è successivo di soli due anni, determina la vera e propria consacrazione definitiva di questo linguaggio a strumento base della Geometria, esponendo una teoria astratta e stabile dei funtori derivati che espandesse, completandola, la teoria esposta nella precedente e voluminosa opera di Cartan e Eilenberg *Homological Algebra*.

In questo terreno cresce la consapevolezza che la grande complessità dei calcoli necessari a trovare i derivati di un funtore dato (e nella fattispecie il problema, tanto comune quanto complicato, di calcolare il funtore derivato della composizione di due funtori $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$, spesso e volentieri affidato ad una sequenza spettrale poco docile) rischia di rendere intrattabile la più parte dei problemi: con questo spirito Grothendieck cerca uno scenario alternativo in cui ripensare l'operazione di "risoluzione" di un funtore, e arriva all'intuizione fondamentale. Molti indizi suggerivano da tempo che l'ente primitivo da considerare, quando si studia la "categoria dell'omotopia" di una categoria abeliana, non è il singolo oggetto da risolvere, ma un intero *complesso* di tali oggetti. Ben studiato era anche il problema di "invertire formalmente" tutti i morfismi di una opportuna sottocategoria di una categoria data: seminale, in questo senso, è il lavoro di Gabriel e Zisman in teoria dell'omotopia [Zis], che precede SGA⁴/₂ di circa una decina d'anni e che dunque venne grandemente sfruttato da Verdier per inquadrare il suo lavoro nell'ambito del "calcolo delle frazioni"; ad una presentazione sommaria di quanto concerne questo argomento è devoluta l'Appendice A di questo lavoro, che si sostiene quasi completamente su [Kra].

La proposta di Grothendieck-Verdier è di sposare un sistema di assiomi (gli assiomi di *categoria triangolata*, apparsi per la prima volta nel lavoro a quattro mani di A. Dold e D. Puppe *Homologie nicht-additiver Funktoren*, 1961) che permette di aggirare uno scoglio fastidioso: sia l'operazione di identificare mappe omotope

che l'operazione di invertire formalmente tutti i quasi-isomorfismi *non rispettano* (spesso con dei controesempi eclatanti) la struttura di categoria abeliana di $\text{Cplx}(\mathbf{A})$ (ciò è conseguenza di un “cattivo comportamento” del funtore di localizzazione rispetto a limiti e colimiti: cfr. [Toe] sezione 2.2 per molti controesempi in questo senso). Gli assiomi proposti da Grothendieck-Verdier introducono una “categoria triangolata” come una coppia $(\mathbf{C}, \mathcal{S})$, dove \mathcal{S} è un'autoequivalenza della categoria \mathbf{C} detta *funtore di sospensione* (il richiamo è all'omonimo funtore $\Sigma: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}$ che si incontra in teoria dell'omotopia), in cui venga isolata una opportuna classe di sequenze di oggetti e morfismi della forma

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow \mathcal{S}(A),$$

detti *triangoli distinti*. Tale classe è soggetta a opportuni assiomi di stabilità che rendono i triangoli distinti i candidati ideali a indebolire la nozione di “sequenza esatta breve”.

Il risultato tecnico che sta alla base della teoria, e che è la chiave di volta su cui poggia, tra le altre, la libertà di poter scrivere

$$\mathfrak{R}(\mathcal{G} \circ \mathcal{F}) = \mathfrak{R}\mathcal{G} \circ \mathfrak{R}\mathcal{F},$$

è la possibilità, dopo aver risolto un oggetto A con un complesso di iniettivi I_A , di rimpiazzare il complesso positivo $\mathcal{F}(I_A)$, non necessariamente composto di iniettivi, con un qualsiasi complesso positivo e iniettivo che gli sia quasi-isomorfo; a quest'ultimo si può applicare tutto il già noto macchinario dell'algebra omologica: anche se il calcolo esplicito dei valori di un funtore derivato è ancora affidato ad una opportuna sequenza spettrale, un gran numero di manipolazioni formali diventa immediato e, non ultimo, la teoria ora è inquadrata in uno scenario più generale, che ne permette una comprensione più profonda.

Lo stato dell'arte, in questo senso, inquadra la catena di corrispondenze functoriali \mathbf{A} (categoria abeliana) $\mapsto \text{Cplx}(\mathbf{A}) \mapsto \text{Kom}(\mathbf{A}) \mapsto \mathbf{D}(\mathbf{A})$ nel frame delle $(\infty, 1)$ -categorie (categorie arricchite in ∞ -gruppidi): passare alla categoria derivata è allora visto come un processo di “troncamento” della serie di tutti i morfismi di ordine superiore al primo, in un modo che ricordi quali morfismi sono effettivamente identificati a meno di celle di ordine superiore. Se la categoria ha abbastanza struttura, questo processo di troncamento si realizza in modo universale, e la categoria che si ottiene consta esattamente della categoria localizzata cui eravamo abituati “classicamente”.

Esaurita questa parte introduttiva, veniamo a descrivere il cuore del lavoro.

D. Orlov ha devoluto molti anni di studio alle proprietà della categoria derivata $\mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X)$ di (complessi limitati di) fasci coerenti su una varietà X : varie proprietà della categoria in sé stessa (e delle sue proprietà di decomposizione, accennate qui nel caso particolare degli spazi proiettivi) sono studiate in [BoO], in collaborazione

con A. Bondal, e in [BoK] da parte di Bondal e M. Kapranov, e uno dei risultati in cui culmina questo processo di indagine è l'oggetto del presente lavoro, per il quale, ad opportune ipotesi (basate essenzialmente sulla dualità di Grothendieck-Serre, nota da tempo, e sul *funtore di Serre* che la realizza) permette di ricostruire “pezzo per pezzo” lo spazio X (varietà liscia, proiettiva e irriducibile) a partire da opportuni oggetti di $\mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X)$ (che fanno le veci dei punti e dei fasci invertibili), in modo che una equivalenza di categorie $\mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X) \cong \mathbf{D}_{\text{coh}}^b(Y)$ si possa far provenire da un isomorfismo $X \cong Y$, a patto che il fascio canonico di X sia ampio o antiampio.

Questo studio si inserisce nel più vasto solco della *teoria della ricostruzione*, che al suo massimo grado di generalità si occupa di recuperare dal dato di un invariante di isomorfismo o di equivalenza, assegnato ad un oggetto, l'oggetto stesso: limitandosi al solo ambito geometrico, già molto vasto, lo stato dell'arte al momento del lavoro di Orlov è l'articolo di Alexander Rosenberg [Ros], in cui si dimostra che

Uno schema (X, \mathcal{O}_X) si può univocamente ricostruire a partire dalla categoria $\mathbf{QCoh}(X)$ dei suoi fasci quasi-coerenti.

Il risultato generalizza un teorema molto più antico (*Des catégories abéliennes*, Gabriel 1961) dall'identico enunciato ma che si limitava a considerare schemi noetheriani: la tecnica usata da Rosenberg è definire opportunamente il concetto di “spettro di una categoria abeliana” in modo che lo spazio $\text{Spec}(\mathbf{QCoh}(X))$ sia isomorfo allo schema di partenza: questa idea è motivata, filosoficamente parlando, dal fatto che un anello unitario R si può riguardare come una categoria abeliana con un unico oggetto.

Introduction.

DERIVED CATEGORIES were introduced during the '60s by Alexander Grothendieck and his student Jean-Louis Verdier, in their study of *étale cohomology* of schemes. Grothendieck left Verdier the task to complete his first intuitions, which were subsequently collected in a series of papers named *SGA4½* by Verdier (but Grothendieck disowned them as part of his work *Séminaires de Géométrie Algébrique*, and Verdier itself was not completely satisfied by this axiomatization).

What can be said for sure is that a deep and beautiful theory stemmed from Grothendieck's original ideas, a theory which, when Verdier's "thèse d'état" [Ver] was published for the first time by *Société Mathématique de France* under *Astérisque* series, bloomed as an independent and stable piece of Mathematics.

Derived categories' roots certainly lie in Algebraic Topology and in particular in Homotopy Theory. But equally, Homological Algebra was the quintessential tool in the "revolution" started by Grothendieck and his school in Algebraic Geometry. Serre's seminal paper *Faisceaux Algébriques Cohérents* (1955) was the first to inject the theory of sheaves (and hence of their cohomology) in the realm of Algebraic Geometry; the even more famous *Tohoku* paper by Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique* (1957) endorsed it as the first "golden bridge" between Algebra and Geometry, completing the frame perfectly given by Cartan-Eilenberg "bible" *Homological Algebra* (1956, Princeton University Press).

The both common and difficult problem of computing the derived functor of a composition $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ often involved "wild" spectral sequences, whose complexity could turn even basic problems into intractable challenges. In this spirit, Grothendieck searched a better scenario to regard the operation of "resolution" of a functor, and came to his starting intuition. In Grothendieck's years, the consensus grew that the primeval entity to be considered was, instead of the single object to be resolved, an entire *complex* of them. Also, the problem of "formal inversion" of all the arrows in a suitable subcategory $\mathbf{S} \subset \mathbf{C}$ was well known and studied since the seminal book [Zis] by Gabriel and Zisman about simplicial homotopy theory. Verdier was certainly aware of it, and profited a lot from their work to set his construction into the more general frame of a "calculus of fractions". Appendix A of this work is devoted to have a glance to this theory, deeply profiting from the clean exposition found in [Kra].

Grothendieck and Verdier proposed to adopt the definition of a triangulated category (a concept first appeared in Dold-Puppe's paper *Homologie nicht-additiver Funktoren*, 1961), in order to avoid a deep and vexing problem: neither the operation of identifying homotopic maps nor the operation of formal inversion of the class of quasi-isomorphisms respect the abelian structure of a category, often in a striking way. From a general point of view, this follows from the fact that the quotient-modulo-homotopy and the localization functor are both highly badly-behaved with respect to limits and colimits: see Section 2.2 of [Toe] for many counterexamples.

Grothendieck and Verdier defined a “triangulated category” as a couple $(\mathbf{C}, \mathcal{S})$, where \mathcal{S} is an autoequivalence of the additive category \mathbf{C} called *suspension functor* (a name which betrays the homotopy-theoretic origin of the definition), in which we are able to distinguish a particular class of diagrams of the form

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow \mathcal{S}(A),$$

called (distinguished) triangles, subject to a suitable set of axioms, and hence called to deputize exact sequences, even in the absence of a “real” abelian structure on \mathbf{C} . It’s worth to notice that triangulated category’s axioms are *not* a weakening of the abelian category ones: abelian and triangulated categories in a certain sense (see Section 5 of [Hol]) “intersect trivially” (see Theorem 5.3 of [Hol]).

The main technical results allowing such a construction, the ones enabling us to write the desirable equality

$$\mathfrak{R}(\mathcal{G} \circ \mathcal{F}) = \mathfrak{R}\mathcal{G} \circ \mathfrak{R}\mathcal{F}$$

(which only takes place in the derived category) are the classical Theorems 1.2 and 1.3 of this work. Given an object A , the complex $\mathcal{F}(I_A)$ is usually far from being made of injectives; but *in the homotopy category* we can substitute it with an injective complex, obtaining something we can handle with the usual homological-machinery. An explicit calculation of $\mathfrak{R}(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(A)$ is far from conceivable without spectral sequences, but lots of formal manipulations are now really easier to handle. Last but not least, the entire theory has been set into a more general, axiomatic framework, conspicuously enhancing our understanding and enlarging our hermeneutical opportunities.

In this regard we can trace the “state of the art” about a derived view of Homological Algebra in a precise understanding of the chain of functorial correspondences \mathbf{A} (abelian category) $\mapsto \mathbf{Cplx}(\mathbf{A}) \mapsto \mathbf{Kom}(\mathbf{A}) \mapsto \mathbf{D}(\mathbf{A})$. The theory of $(\infty, 1)$ -categories (∞ -groupoid-enriched categories) may give the right framework: we can view the procedure of passing to the derived category as a suitably performed “truncation” in the sequence of all higher-degree morphisms in \mathbf{A} , in a way that keeps track of which morphisms in \mathbf{A} are to be regarded as equivalences in a higher context. Assuming some “mild” conditions this truncation procedure can be realized *universally*, exhibiting the “classical” localized category we were accustomed to deal.

Having finished this introductory paragraph, let’s turn to the gist of this work.

D. Orlov spent lots of years studying the derived category $\mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X)$ of coherent sheaves on a variety X ; in the spirit of reconstruction theory, lots of algebraic properties of the category itself reflect into geometric properties of the space X . As an example of this, we present in Section 1.3 a Theorem which can be found clearly presented in [Cal] and due to Orlov-Bondal-Kapranov: the category $\mathbf{D}_{\text{coh}}^b(\mathbb{P}^n)$ can

be presented in a “simple” way by means of suitable shifts, mapping cones and cylinders of a finite number of twisting sheaves $\mathcal{O}(n)$.

Orlov’s study culminates into the main topic of this work: Section 2.4 is entirely devoted to a complete account of the Theorem appeared in Bondal-Orlov’s paper [Orl], by means of which one can exhibit an isomorphism of varieties $X \cong Y$ starting from an equivalence of categories $\mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X) \cong \mathbf{D}_{\text{coh}}^b(Y)$, provided the canonical sheaf/bundle of X is ample or antiample. Orlov’s idea is to explicitly build a space isomorphic to X by means of suitable objects in $\mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X)$ which play the role of its *points* and *invertible sheaves*: we are allowed to do that mainly thanks to the good behaviour of the canonical sheaf of X , and by means of (a suitable categorification of) Grothendieck-Serre duality.

As we said before, Orlov’s result is part of a more general framework: in its utmost generality, *reconstruction theory* copes with the problem of recovering an object from either a small amount of data about suitable “invariants” of the object itself (this is the geometric case of reconstruction of spaces), or its models/representations into another object (this is the algebraic case of Lawvere or Tannaka-Krein reconstruction theorems). The state-of-the-art about geometric reconstruction, before Orlov’s theorem, was A. Rosenberg’s paper *Reconstruction of schemes*, which proves the following result:

Any scheme (X, \mathcal{O}_X) can be uniquely recovered from the category $\mathbf{QCoh}(X)$ of quasi-coherent sheaves on X .

Rosenberg’s reconstruction theorem generalizes a previous (and quite ancient) result by Gabriel (*Des catégories abéliennes*, 1961), proving an identical result about *noetherian* schemes. Rosenberg’s idea generalizes the Spec construction to give a correspondence $\mathbf{A} \mapsto \text{Spec}(\mathbf{A})$, assigning to every abelian category its “spectrum of prime ideals” (indeed this is not a foolish idea: a –unitary– ring is nothing more than an abelian category with a single object); this procedure exhibits a ringed space $\text{Spec}(\mathbf{QCoh}(X))$ which turns out to be isomorphic to the scheme X .

*A C., che mi ha insegnato l'amore per i libri.
A B., il quale mi ha suggerito che questo amore
non è dissimile dall'amore per l'Universo (che è una Biblioteca).
A chi mi ha permesso di parlare la misteriosa lingua dei pochi volumi che ho letto.
A chi, infine, sopporta da sempre l'inevitabile balbuzie del principiante.*

Padova, 6 luglio 2012.

Indice

1	CATEGORIE DI COMPLESSI	13
1.1	Algebra Omologica	13
1.1.1	Oggetti di Omologia.	15
1.1.2	Proprietà funtoriali di $H_n(-)$	16
1.1.3	Omotopie tra mappe di catene.	17
1.2	Categorie Derivate.	19
1.2.1	La categoria $\text{Kom}(\mathbf{A})$ è triangolata.	24
1.2.2	Categoria Derivata di $\text{Kom}(\mathbf{A})$	31
1.2.3	Funtori Derivati.	37
1.3	La categoria derivata di \mathbb{P}^n	42
2	CATEGORIE DI FASCI	50
2.1	Richiami generali.	50
2.1.1	Immagini Dirette e Inverse.	50
2.1.2	Faschi su insiemi localmente chiusi.	53
2.1.3	Prodotto tensore Esterno.	55
2.2	Coomologia.	55
2.2.1	Classi di Fasci Aciclici.	57
2.3	Dualità di Serre.	64
2.3.1	Faschi Coerenti.	64
2.3.2	Faschi ampi e molto ampi.	65
2.3.3	Dualità di Serre.	66
2.4	Il teorema di ricostruzione di Orlov.	69
A	CATEGORIE LOCALIZZATE	76
A.1	Categorie quoziente.	77
A.2	Calcolo delle frazioni.	78
A.3	Localizzazioni Triangolate.	79
A.3.1	Sottocategorie triangolate e localizzazione alla Verdier.	82
A.4	Funtori derivati come estensioni di Kan.	86

B	SUCCESSIONI SPETTRALI	89
B.1	Generalità.	89
B.2	Complessi doppi.	93

Capitolo 1

CATEGORIE DI COMPLESSI

1.1 Richiami di Algebra Omologica.

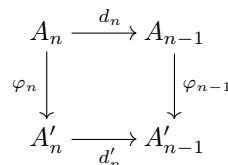
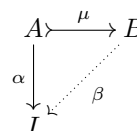
If we didn't have category theory we would feel really stupid constantly proving the same theorems about lots of different objects.

post at math.stackexchange.com

Notazioni di partenza e prerequisiti. Sia \mathbf{C} una categoria. Un *oggetto iniettivo* in \mathbf{C} è un oggetto I tale che il funtore $\text{hom}_{\mathbf{C}}(-, I)$ sia esatto, o (equivalentemente) tale che per ogni freccia $\alpha: A \rightarrow I$ e ogni monomorfismo $\mu: A \hookrightarrow B$ esiste un morfismo $\beta: B \rightarrow I$ tale che $\beta \circ \mu = \alpha$: se I è iniettivo in \mathbf{C} il diagramma a fianco è commutativo. La nozione duale è quella di *oggetto proiettivo*, che chiede che il funtore $\text{hom}_{\mathbf{C}}(P, -)$ sia esatto.

Una categoria \mathbf{C} ha *abbastanza proiettivi* se per ogni oggetto $A \in \mathbf{C}$ esiste un epimorfismo $p: P \rightarrow A$ con P proiettivo. Si dice anche che la famiglia degli oggetti proiettivi di \mathbf{C} è *generante* in \mathbf{C} . Dualmente \mathbf{C} ha *abbastanza iniettivi* se ogni oggetto ammette un monomorfismo verso un iniettivo. Si dice che la classe degli iniettivi è *cogenerante* in \mathbf{C} . Nel seguito, ogni istanza della nozione di oggetto iniettivo e proiettivo apparirà nell'ambito di una generica categoria additiva, che indichiamo con \mathbf{A} .

Definizione 1.1 [OGGETTI GRADUATI]: Definiamo la categoria $\text{gr}(\mathbf{A})$ degli *oggetti graduati in \mathbf{A}* come quella che ha per oggetti le sequenze $\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ di oggetti di \mathbf{A} indicizzate dagli interi, collegate da mappe in senso decrescente $\dots \rightarrow A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}}$



$A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \rightarrow \dots$ e per morfismi le famiglie $\varphi = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tali che per ogni $n \in \mathbb{Z}$ il quadrato a fianco sia commutativo.

Definizione 1.2 [COMPLESSI DI CATENE]: La categoria dei *complessi di catene*, chiamata $\text{Cplx}(\mathbf{A})$, di \mathbf{A} è la sottocategoria piena dei suoi oggetti graduati tali che la composizione $d_n \circ d_{n+1}$ sia la freccia zero, per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Un oggetto di $\text{Cplx}(\mathbf{A})$ si denoterà a seconda dei casi con il carattere calligrafico \mathcal{A} , con la coppia $(A_\bullet, \partial_\bullet)$ oppure con $(A_n, \partial_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Osservazione 1.1: “Girare tutte le frecce” permette di definire la categoria dei complessi di *cocatene*, i cui morfismi sono detti mappe di *cocatene*. Si tratta della categoria i cui oggetti sono sequenze ascendenti del tipo

$$C: \quad \cdots \longrightarrow C_{n-2} \xrightarrow{\delta_{n-2}} C_{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} C_n \xrightarrow{\delta_n} C_{n+1} \longrightarrow \cdots \quad (1.1)$$

(le mappe δ_n sono dette *codifferenziali del complesso*) e in cui i morfismi “rispettano i codifferenziali”, in un senso analogo al caso delle catene. Similmente a prima indicheremo un complesso di cocatene con C (o altre lettere calligrafiche), con la coppia $(C^\bullet, \delta^\bullet)$ oppure con $(C^n, \delta^n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Osservazione 1.2: L'Osservazione precedente potrebbe far sospettare che ci sia una equivalenza tra le categorie dei complessi di catene e cocatene data dal funtore opposto: questa equivalenza è in effetti un isomorfismo, dato che i complessi

$$\begin{array}{ccc} X_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & X_n & \xrightarrow{\partial_n} & X_{n-1} \\ \varphi_{n+1} \downarrow & & \downarrow \varphi_n & & \downarrow \varphi_{n-1} \\ Y_{n+1} & \longrightarrow & Y_n & \longrightarrow & Y_{n-1} \end{array} \quad \iff \quad \begin{array}{ccc} X_{n+1} & \xleftarrow{\partial_{n+1}^{\text{op}}} & X_n & \xleftarrow{\partial_n^{\text{op}}} & X_{n-1} \\ \varphi_{n+1}^{\text{op}} \uparrow & & \uparrow \varphi_n^{\text{op}} & & \uparrow \\ Y_{n+1} & \longleftarrow & Y_n & \longleftarrow & Y_{n-1} \end{array} \quad (1.2)$$

si corrispondono mediante un funtore che è una involuzione. Per questa ragione sarà spesso sottinteso che una costruzione eseguita nella categoria dei complessi di catene ha un corrispettivo, a frecce girate, nella categoria dei complessi di cocatene (si veda per esempio la Definizione 1.3).

Un complesso di catene o di cocatene X si dice *limitato* (inferiormente, superiormente) se $X_n = 0$ ($X^n = 0$) per $|n| \gg 0$ ($n \ll 0, n \gg 0$).

La collezione dei complessi in \mathbf{A} limitati (inferiormente, superiormente) costituisce la classe degli oggetti di una categoria, denotata con $\text{Cplx}^b(\mathbf{A})$ ($\text{Cplx}^+(\mathbf{A})$, $\text{Cplx}^-(\mathbf{A})$), che è palesemente piena in $\text{Cplx}(\mathbf{A})$.

Proposizione 1.1: Se \mathbf{A} è abeliana, tale è anche $\text{Cplx}(\mathbf{A})$.

Omettiamo la prova: consta della verifica, tediosa ma non difficile, che $\text{Cplx}(\mathbf{A})$ gode di tutte le proprietà di una categoria abeliana.

Esempio 1. *Raccogliamo in un solo esempio vari tipi di complessi di catene*

- Ogni sequenza esatta $\cdots \rightarrow A_{n+1} \rightarrow A_n \rightarrow A_{n-1} \rightarrow \cdots$ è un complesso di catene.
- Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ possiamo definire il complesso concentrato con A al grado n come quello ottenuto dalla sequenza (esatta)

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \underset{n^{\text{mo}}}{A} \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \quad (1.3)$$

(i differenziali sono tutti frecce zero); in tal senso $\text{Cplx}(\mathbf{A})$ contiene in modo canonico una copia di \mathbf{A} (c'è un funtore che manda A nel complesso concentrato con A al grado zero).

- Per ogni $f: A \rightarrow B$ possiamo definire il complesso concentrato con f al grado n come quello ottenuto dalla sequenza

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \underset{n^{\text{mo}}}{A} \rightarrow B \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \quad (1.4)$$

e quello concentrato con $A \hookrightarrow B \rightarrow C$ al grado n ottenuto dalla sequenza

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \underset{n^{\text{mo}}}{A} \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \quad (1.5)$$

Definizione 1.3 [FUNTORE DI SHIFT]: Sia k un intero fissato: da questo dato resta definito un endofuntore (che è in effetti un automorfismo di $\text{Cplx}(\mathbf{A})$) $[k]: C \mapsto C[k]$ definito come

$$\begin{cases} (C[k])_n = C_{n-k} \\ \delta_{C[k]}^n = (-1)^k \delta_C^{n-k} \end{cases} \quad (1.6)$$

La corrispondenza sulle frecce è definita nell'ovvio modo compatibile con la corrispondenza sugli oggetti:

$$(\varphi: C \rightarrow C') \mapsto \varphi[k] = \{\varphi^{n-k}\}_{n \in \mathbb{Z}} \quad (1.7)$$

Osservazione 1.3: Dall'Osservazione 1.2 segue che una definizione analoga si può dare per un funtore di shift tra complessi di cocatene: vi sarà una corrispondenza sugli oggetti definita da $A^n \mapsto A^{n+k} = (\mathcal{A}[k])^n$ e che agisce sui differenziali shiftando l'indice n in $n+k$ a meno di un segno $(-1)^k$.

1.1.1 Oggetti di Omologia.

Definizione 1.4 [CICLI E BORDI]: Dato un complesso di catene $\mathcal{A} = (A_\bullet, \partial_\bullet)$, definiamo l' n -esimo ciclo $Z_n(\mathcal{A})$ come $\ker \partial_n$, e l' n -esimo bordo $B_n(\mathcal{A})$ come $\text{im } \partial_{n+1}$. Con questa nomenclatura, la condizione $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ implica che $B_n(\mathcal{A}) \leq Z_n(\mathcal{A})$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

Definizione 1.5 [OMOLOGIA DI UN COMPLESSO]: Dato un complesso di catene $\mathcal{A} = (A_\bullet, \partial_\bullet)$, definiamo l' n -esimo oggetto di omologia di \mathcal{A} come

$$H_n(\mathcal{A}) := Z_n(\mathcal{A})/B_n(\mathcal{A}) = n\text{-cicli}/n\text{-bordi}. \quad (1.8)$$

Definiamo l'omologia totale del complesso \mathcal{A} come $H_\bullet(\mathcal{A}) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H_n(\mathcal{A})$.

Si noti che $H_n(\mathcal{A}) = 0$ se e solo se \mathcal{A} è esatto al grado n : allora $H_\bullet(\mathcal{A}) = 0$ se e solo se \mathcal{A} è esatto in ogni grado.

Si noti anche che da ogni complesso possiamo estrarre sequenze esatte brevi

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow B_n \longrightarrow Z_n \longrightarrow H_n(\mathcal{A}) \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow Z_n \longrightarrow A_n \longrightarrow B_{n-1} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Definizioni analoghe sussistono per la coomologia di un complesso di cocatene C : definiamo l' n -esimo cociclo $Z^n(C)$ come $\ker \delta_n$, e l' n -esimo cobordo $B^n(C)$ come $\text{im } \delta_{n-1}$. Con questa nomenclatura, la condizione $\delta_n \circ \delta_{n-1} = 0$ implica che $B^n(C) \leq Z^n(C)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Allora definiamo

$$H^n(C) := Z^n(C)/B^n(C) = n\text{-cocicli}/n\text{-cobordi}. \quad (1.9)$$

È possibile determinare sequenze esatte analoghe a quelle sopra scritte.

1.1.2 Proprietà functoriali di $H_n(-)$.

La definizione dei morfismi data in 1.2 data implica che ogni mappa di catene "rispetta cicli e bordi", nel senso che ogni mappa di catene in $\text{Cplx}(\mathbf{A})$, $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ induce un morfismo in \mathbf{A} tra $H_n(\mathcal{A})$ e $H_n(\mathcal{A}')$: si consideri la composizione

$$0 \rightarrow B_n \xrightarrow{\iota} Z_n \xrightarrow{\varphi_n|_{Z_n}} Z'_n \rightarrow Z'_n/B'_n \quad (1.10)$$

e si noti che essa è la mappa zero. Allora $B_n \rightarrow Z'_n/B'_n = H_n(\mathcal{A}')$ fattorizza in modo unico attraverso $\text{coker } \iota \cong Z_n/B_n = H_n(\mathcal{A})$, porgendo un'unica freccia canonica

$$H_n(\varphi): H_n(\mathcal{A}) \rightarrow H_n(\mathcal{A}'). \quad (1.11)$$

Dualmente, $H^n(-)$ è un funtore controvariante $\text{Cplx}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{A}$.

Osservazione 1.4 : Se $\varphi: C \rightarrow C'$ è una mappa di cocatene, si indica spesso $H^n(\varphi): H^n(C) \rightarrow H^n(C')$ con φ^* ; si noti infine che $H^n(C) \cong H^0(C[k])$.

1.1.3 Omotopie tra mappe di catene.

La funtorialità di $H_\bullet: \text{Cplx}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{A}$ ci porta a studiare quelle mappe di catene $\varphi, \psi: C \rightarrow D$ che inducono la stessa mappa in (co)omologia. Per fare ciò si deve astrarre una nozione propria della Topologia Algebrica, ossia il fatto che mappe continue e omotope inducono la stessa mappa in omologia singolare¹; una dimostrazione esplicita di questo fatto si trova per esempio in [Vic]; il lettore interessato ad una astrazione maggiore può consultare [Wei]. In questo contesto meramente algebrico, siamo interessati a recuperare questa nozione definendo una *omotopia tra mappe di catene* in una qualsiasi categoria di complessi.

Definizione 1.6: Dati due complessi di catene $C = \{C_n, \partial_n^C\}$, $D = \{D_n, \partial_n^D\}$, e due mappe di catene $\varphi, \psi: C \rightarrow D$, diciamo che esse sono *omotope* se esiste una mappa di catene di grado +1, $\Sigma_n: C_n \rightarrow D_{n+1}$ tale che

$$\psi_n - \varphi_n = \partial_{n+1}^D \circ \Sigma_n + \Sigma_{n-1} \circ \partial_n^C \quad (1.12)$$

per ogni $n \in \mathbb{Z}$, ossia tale da far commutare il diagramma seguente per ogni $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}^C} & C_n & \xrightarrow{\partial_n^C} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \psi_{n+1} & \swarrow \varphi_{n+1} & \downarrow \psi_n & \swarrow \varphi_n & \downarrow \psi_{n-1} & & \\ & & D_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}^D} & D_n & \xrightarrow{\partial_n^D} & D_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array} \quad (1.13)$$

Proposizione 1.2: Due mappe omotope inducono la stessa mappa in omologia.

Dimostrazione. È immediato provare (tenuta a mente l'additività del funtore $H_n(-)$) che $H_n(\psi_n - \varphi_n) = H_n(\partial_{n+1}^D \circ \Sigma_n + \Sigma_{n-1} \circ \partial_n^C)$ coincide con la mappa zero. \square

Definiamo una mappa di catene *nullomotopa* (oppure *omotopa a zero*) se essa è omotopa alla mappa zero $\mathbf{0}$, in cui $0_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$; definiamo *nullomotopo* (o *contraibile*) un complesso C tale che id_C è nullomotopa: un esempio di complesso nullomotopo è il complesso esatto $A' \hookrightarrow A' \oplus A'' \twoheadrightarrow A''$ in \mathbf{A}^2 .

Si noti che se $\varphi: C \rightarrow D$ e $\psi: D \rightarrow E$ sono due mappe di catene in cui almeno una delle due è nullomotopa, allora tale è la composizione $\psi \circ \varphi$. Allora

¹In effetti questa proprietà riguarda ogni teoria coomologica nel senso di Eilenberg-Steenrod: cfr [Rot], pp. 363 e segg.

²Questo fatto si può riformulare in modo più generale: diciamo che un complesso *spezza* quando $B_n \leq C_n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, o equivalentemente se esiste una famiglia di $\{\alpha_n: C_{n-1} \rightarrow C_n\}$ tale che $\partial_n \circ \alpha_n \circ \partial_n = \partial_n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Diciamo che un complesso C è *esatto-spezzante* se è esatto e spezza; si dimostra che i complessi nullomotopi sono tutti e solo gli esatti spezzanti.

Lemma 1.1 : La relazione

$$\varphi \sim \varphi' \iff \varphi, \varphi': C \rightarrow \mathcal{D} \text{ sono omotope} \quad (1.14)$$

è una congruenza in $\text{hom}_{\text{Cplx}(\mathbf{A})}(C, \mathcal{D})$.

Lemma 1.2 : Siano $\varphi \sim \psi: C \rightarrow \mathcal{D}$, e $\varphi' \sim \psi': \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ mappe a due a due omotope. Allora

$$\varphi' \circ \varphi \sim \psi' \circ \psi. \quad (1.15)$$

Lemma 1.3 : Sia $\mathcal{F}: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$ un funtore additivo. Se $C, \mathcal{D} \in \text{Cplx}(\mathbf{A})$ e $\varphi \sim \psi: C \rightarrow \mathcal{D}$, allora $\mathcal{F}(\varphi) \sim \mathcal{F}(\psi): \mathcal{F}(C) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{D})$ (confondendo in modo ovvio \mathcal{F} col funtore che esso induce da $\text{Cplx}(\mathbf{A})$ in sè).

Corollario 1 : se $\varphi \sim \psi: C \rightarrow \mathcal{D}$ e $\mathcal{F}: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$ è additivo, allora $H_\bullet(\mathcal{F}(\varphi)) \cong H_\bullet(\mathcal{F}(\psi)): H_\bullet(\mathcal{F}(C)) \rightarrow H_\bullet(\mathcal{F}(\mathcal{D}))$.

Tutto questo permette di dare la

Definizione 1.7 [CATEGORIA DELL'OMOTOPIA DI $\text{Cplx}(\mathbf{A})$]: Definiamo una categoria $\text{Kom}(\mathbf{A})$ che ha gli stessi oggetti di $\text{Cplx}(\mathbf{A})$ e tale che

$$\text{hom}_{\text{Kom}(\mathbf{A})}(C, \mathcal{D}) = \text{hom}_{\text{Cplx}(\mathbf{A})}(C, \mathcal{D}) / \sim. \quad (1.16)$$

Stiamo usando esplicitamente tutti i Lemmi enunciati, per garantire che in $\text{Kom}(\mathbf{A})$ valgano gli assiomi di categoria: il Lemma 1.3 implica tra le altre cose che un funtore additivo \mathcal{F} induce un funtore tra le rispettive categorie dell'omotopia, e il fatto che mappe di catene omotope hanno la stessa omologia implica che il funtore $H_\bullet(-)$ fattorizza attraverso $\text{Kom}(\mathbf{A})$.

Gli isomorfismi di $\text{Kom}(\mathbf{A})$ sono gli "isomorfismi a meno di omotopia", ossia le mappe di catene $\varphi: C \rightarrow \mathcal{D}$ tali che esista $\psi: \mathcal{D} \rightarrow C$ per cui $\varphi \circ \psi \sim \text{id}_{\mathcal{D}}$, $\psi \circ \varphi \sim \text{id}_C$. Ciò motiva la seguente

Definizione 1.8 : Due complessi C, \mathcal{D} si dicono *omotopicamente equivalenti* se sono isomorfi in $\text{Kom}(\mathbf{A})$, ossia se esiste $\varphi \in \text{hom}_{\text{Cplx}(\mathbf{A})}(C, \mathcal{D})$, che è un isomorfismo in $\text{Kom}(\mathbf{A})$. Una tale φ si dice *equivalenza omotopica*.

Un problema. La categoria $\text{Kom}(\mathbf{A})$ dell'omotopia di una categoria di complessi in \mathbf{A} non è in generale abeliana, nemmeno quando lo è \mathbf{A} . Si consideri infatti il seguente controesempio quando $\mathbf{A} = \mathbf{Ab}$.

Sia \mathcal{X} il complesso concentrato con \mathbb{Z} al grado zero, e \mathcal{Y} il complesso concentrato con $\text{id}_{\mathbb{Z}}$ al grado -1 . Sia poi φ la mappa di catene

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathcal{X} & & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ \varphi \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \text{id} \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathcal{Y} & & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array} \quad (1.17)$$

È evidente che φ non è nulla come mappa di catene, ma è nullomotopa.

Questa freccia non può avere nucleo in $\text{Kom}(\mathbf{Ab})$. Consideriamo infatti \mathcal{K} , il complesso composto dai nuclei di φ : sia questa mappa di catene, sia id_X , condividono la proprietà universale del nucleo di un morfismo, e d'altra parte non sono omotopi. \square

1.2 Categorie Triangolate e Derivate.

Now, you expect a little bit more than knowing that they induce the same map in homology. You expect them to induce the same map in homology *for a reason*.

J. Lurie

Se la categoria dell'omotopia di una categoria di complessi non è in generale abeliana, si sente il bisogno di rimpiazzare la nozione di sequenza esatta corta, non più disponibile, con un'altra. In tale ottica si può motivare la definizione di *categoria triangolata*.

Dove però l'essere abeliana è per una categoria \mathbf{C} una caratteristica strettamente inerente ad essa (coinvolge per esempio l'esistenza di certi limiti e colimiti, oppure l'isomorfismo di funtori $\times \cong \amalg$), una struttura triangolata è invece (in un senso opportuno) determinata da dei dati *esterni* a \mathbf{C} .

Nella fattispecie si tratta del dato di un endofunttore \mathcal{S} , detto *sospensione*, e di certi diagrammi particolari detti *triangoli distinti*, il tutto soggetto a opportuni assiomi.

Se \mathbf{A} è una categoria additiva, un *funttore di sospensione* è un endofunttore \mathcal{S} additivo e invertibile, e un *triangolo* è una sequenza di oggetti e frecce come in

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \mathcal{S}(X). \quad (1.18)$$

Un *morfismo* tra triangoli è, prevedibilmente, una terna (f, g, h) di frecce in \mathbf{A} tale che il diagramma

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & \mathcal{S}(X) \\ f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow & & \downarrow \mathcal{S}(f) \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & \mathcal{S}(X') \end{array} \quad (1.19)$$

sia commutativo. Questo ovviamente è un isomorfismo di triangoli se e solo se tutti e tre f, g, h sono isomorfismi di \mathbf{A} . Raccogliamo tutto quanto appena detto in un'unica Definizione:

1.2. CATEGORIE DERIVATE.

Definizione 1.9 [CATEGORIA TRIANGOLATA]: Una *categoria triangolata* consta del dato di una coppia $(\mathbf{T}, \mathcal{S})$, dove \mathbf{T} è una categoria additiva, ed \mathcal{S} è un funtore di sospensione (spesso chiamato *funtore di shift* o *traslazione*), dove sia possibile isolare una famiglia (eventualmente una classe) di triangoli, detti *triangoli distinti*, caratterizzati dagli assiomi seguenti:

- TR1 Ogni triangolo isomorfo ad un triangolo distinto è un triangolo distinto.
- TR2 Per ogni $X \in \text{Ob}_{\mathbf{T}}$, il triangolo $X \xrightarrow{\text{id}} X \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{S}(X)$ è distinto.
- TR3 Per ogni morfismo $f: X \rightarrow Y$ in \mathbf{T} esiste un triangolo distinto di cui f è il morfismo iniziale, $X \xrightarrow{f} Y \rightarrow Z \rightarrow \mathcal{S}(X)$.
- TR4 (proprietà di rotazione) Se $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \mathcal{S}(X)$ è un triangolo distinto, allora anche $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \mathcal{S}(X) \xrightarrow{-\mathcal{S}(u)} \mathcal{S}(Y)$ lo è, e viceversa.
- TR5 (proprietà di completamento) Dati due triangoli distinti $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \mathcal{S}(X)$ e $X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} \mathcal{S}(X')$, ogni diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & \mathcal{S}(X) \\
 \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow \cdots & & \downarrow \mathcal{S}(f) \\
 X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & \mathcal{S}(X')
 \end{array} \tag{1.20}$$

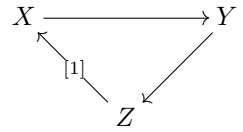
si può completare, eventualmente in più modi, per diventare un morfismo di triangoli.

- TR6 (assioma ottaedrale) Dati triangoli distinti $X \xrightarrow{u} Y \rightarrow Z' \rightarrow \mathcal{S}(X)$, $Y \xrightarrow{v} Z \rightarrow X' \rightarrow \mathcal{S}(Y)$ e $X \xrightarrow{vu} Z \rightarrow Y' \rightarrow \mathcal{S}(X)$ esiste un triangolo distinto $Z' \rightarrow Y' \rightarrow X' \rightarrow \mathcal{S}(Z')$ che fa commutare il diagramma seguente.

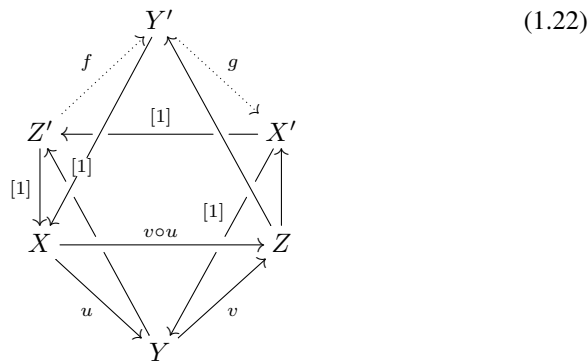
$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{u} & Y & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & \mathcal{S}(X) \\
 \text{id} \downarrow & & \downarrow v & & \downarrow & & \text{id} \downarrow \\
 X & \xrightarrow{vu} & Z & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & \mathcal{S}(X) \\
 u \downarrow & & \text{id} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \mathcal{S}(u) \\
 Y & \xrightarrow{v} & Z & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & \mathcal{S}(Y) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \text{id} \downarrow & & \downarrow \\
 Z' & \cdots \longrightarrow & Y' & \cdots \longrightarrow & X' & \cdots \longrightarrow & \mathcal{S}(Z')
 \end{array} \tag{1.21}$$

In più, sia righe che colonne di questo diagramma sono triangoli distinti.

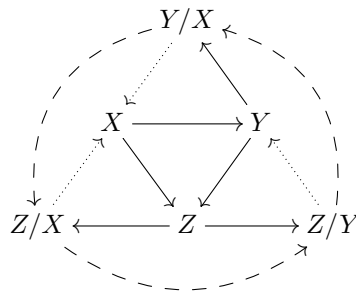
Spesso si usa la notazione $[k]$ per indicare il funtore S^k (si indica dunque spesso $S(X)$ con $X[1]$: la ragione, come si vedrà tra poco, è che il prototipo di categoria triangolata è la categoria dell'omotopia di una qualche categoria di complessi di catene, nella quale il funtore di sospensione è proprio lo shift della Definizione 1.3). I triangoli si presentano, in questa notazione, come sequenze lineari $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$, o come $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow^+$, o ancora come effettivi triangoli quali quello a fianco.



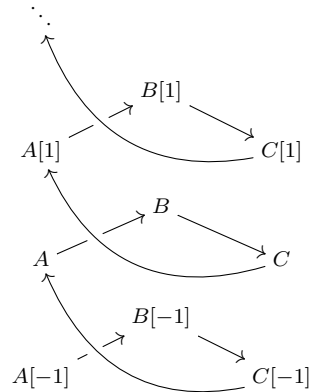
Tre osservazioni sugli assiomi. In [Sch1] si osserva che l'assioma ottaedrale si può presentare, in tale notazione, come la completabilità (e commutatività) del diagramma tridimensionale



Sono state date ulteriori formulazioni equivalenti dell'assioma ottaedrale; moralmente esso fa da analogo a un'altra proprietà tipica di oggetti in categorie abeliane, ossia il "teorema della matricola" per cui $(Z/X)/(Y/X) \cong Z/Y$, per ogni sequenza di sottoggetti $X \hookrightarrow Y \hookrightarrow Z$. Se si indica con un triangolo chiuso una sequenza esatta, la situazione si può riassumere graficamente come



dove la freccia $X \rightarrow Z$ è ottenuta per composizione, e le altre fanno parte delle ovvie sequenze esatte corte canoniche. L'assioma ottaedrale consiste allora



1.2. CATEGORIE DERIVATE.

nel chiedere che un triangolo del genere si possa completare con le frecce curve tratteggiate, le quali a loro volta costituiscono un triangolo distinto.

L'assioma di rotazione invece codifica il fatto che è possibile rappresentare tridimensionalmente i triangoli di \mathbf{T} come delle "torri" analoghe a quella a lato: nelle notazioni di questa figura, $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A[1]$ è distinto se e solo se lo è $C[-1] \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$, se e solo se lo è $B \xrightarrow{v} C \rightarrow A[1] \xrightarrow{-v[1]} B[1]$. Si rimanda a [Hol] e a [Gel] per approfondimenti.

Possiamo già tracciare le prime conseguenze della definizione data, raccolte nelle proposizioni seguenti.

Proposizione 1.3 : Sia $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ un triangolo distinto. Allora $v \circ u = 0$ e $w \circ v = 0$, ossia la composizione di due morfismi consecutivi in un triangolo distinto è il morfismo nullo in \mathbf{T} .

Dimostrazione. La proprietà di rotazione assicura che è sufficiente provare che $v \circ u = 0$, e che il triangolo $Y \rightarrow Z \rightarrow X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1]$ è distinto. Per gli assiomi TR2 e TR5 poi, il diagramma

$$\begin{array}{ccccccc}
 Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X[1] & \xrightarrow{-u[1]} & Y[1] \\
 \downarrow v & & \parallel & & & & \downarrow v[1] \\
 Z & \xlongequal{\quad} & Z & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & Z[1]
 \end{array} \tag{1.24}$$

si può completare ad un morfismo di triangoli con la freccia zero $X[1] \rightarrow 0$ in modo che $v[1] \circ (-u[1]) = -(v \circ u)[1] = 0$, col che è $v \circ u = 0$. \square

Proposizione 1.4 : Sia $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ un triangolo distinto. Per ogni oggetto $T \in \text{Ob}_{\mathbf{T}}$ esiste una sequenza esatta lunga di gruppi abeliani

$$\begin{aligned}
 & \cdots \rightarrow \text{hom}_{\mathbf{T}}(T, X[k]) \xrightarrow{u[k]_*} \text{hom}_{\mathbf{T}}(T, Y[k]) \xrightarrow{v[k]_*} \\
 & \xrightarrow{v[k]_*} \text{hom}_{\mathbf{T}}(T, Z[k]) \xrightarrow{w[k]_*} \text{hom}_{\mathbf{T}}(T, X[k+1]) \rightarrow \cdots
 \end{aligned}$$

Dimostrazione. Per la proprietà di rotazione, basta mostrare che

$$\text{hom}_{\mathbf{T}}(T, X[k]) \xrightarrow{u[k]_*} \text{hom}_{\mathbf{T}}(T, Y[k]) \xrightarrow{v[k]_*} \text{hom}_{\mathbf{T}}(T, Z[k]) \tag{1.25}$$

è esatta come sequenza corta di gruppi abeliani. Per quanto provato prima $v \circ u = 0$, dunque $0 = v[k]_* \circ u[k]_*$, e la sequenza è un complesso. Ora, se $f \in \ker v[k]_*$ il

diagramma

$$\begin{array}{ccccccc}
 T[-k] & \xrightarrow{0} & 0 & \longrightarrow & T[-k+1] & \xrightarrow{-u[1]} & T[-k+1] \\
 \downarrow f[-k] & & \downarrow & & \downarrow \alpha & & \downarrow f[-k+1] \\
 Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] & \xrightarrow{-u[1]} & Y[1]
 \end{array} \quad (1.26)$$

si completa con α in modo da diventare un morfismo di triangoli. In particolare $f[-k+1] = -(-u[1] \circ \alpha) = u[1] \circ \alpha$, dunque (invertendo $(-)[-k+1]$) si ha $f = u[k] \circ \alpha[k-1] \in \text{im } u[k]_*$. \square

Proposizione 1.5 [LEMMA DEI 5 TRIANGOLATO]: Se viene dato un morfismo di triangoli distinti come nel diagramma

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\
 \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow f[1] \\
 X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & X'[1]
 \end{array} \quad (1.27)$$

tale che f e g siano isomorfismi, allora anche h lo è.

Dimostrazione. Si applichi il funtore $\text{hom}_{\mathbf{T}}(Z', -)$ al diagramma, per ottenere un diagramma in \mathbf{Ab} cui applicare l'usuale lemma dei 5. In particolare si trova che esiste una $s: Z' \rightarrow Z$ tale che $h \circ s = \text{id}_{Z'}$. Procedendo analogamente con $\text{hom}_{\mathbf{T}}(-, Z')$ individua un morfismo r tale che $r \circ h = \text{id}_Z$. \square

Proposizione 1.6 : Sia $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ un triangolo distinto, e $w = 0_{Z, X[1]}$ (il morfismo zero). Allora il triangolo è *spezzante*, ossia u è un monomorfismo spezzante, e v è un epimorfismo spezzante, in \mathbf{T} .

Dimostrazione. Si consideri il diagramma

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{0} & X[1] \\
 \parallel & & \downarrow & & \downarrow 0 & & \parallel \\
 X & \xrightarrow{=} & X & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & X[1]
 \end{array} \quad (1.28)$$

le cui righe sono triangoli esatti (per l'assioma TR1 e per la proprietà di rotazione). Esso si può allora completare ad un morfismo di triangoli trovando una $h: Y \rightarrow X$

che fa da inversa sinistra a u ; ragionando analogamente sul diagramma

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \longrightarrow & X[1] \\
 \uparrow & & \uparrow & & \parallel & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & Z & \xlongequal{\quad} & Z & \longrightarrow & 0
 \end{array} \tag{1.29}$$

si trova una inversa destra a v completandolo ad un morfismo di triangoli. \square

1.2.1 La categoria $\text{Kom}(\mathbf{A})$ è triangolata.

Pure se non è abeliana, la categoria $\text{Kom}(\mathbf{A})$ dei complessi modulo omotopia può essere dotata di una struttura di categoria triangolata, in cui il funtore di sospensione è proprio lo shift $(-)[1]$ (questo spiega perché anche lo shift generico si è indicato con tale scrittura). Precisamente, un oggetto $\mathcal{A} = (A_n, \partial_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ viene mandato in $(A_{n-1}, -\partial_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}$, e una mappa di catene di componenti φ_n viene mandata nella mappa di catene di componenti φ_{n-1} .

È facile dimostrare che il funtore $(-)[1]$ è effettivamente compatibile con le omotopie, e passa dunque al quoziente in $\text{Cplx}(\mathbf{A})$: per dimostrarlo è sufficiente provare che se $\varphi \sim \psi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ mediante l'omotopia Σ allora $\varphi[k] \sim \psi[k]$ mediante l'omotopia $\Sigma[k]$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$: se $\varphi \sim \psi$, vuol dire che $\varphi_m - \psi_m = \partial_{m+1}^{\mathcal{D}} \circ \Sigma_m + \Sigma_{m-1} \circ \partial_m^{\mathcal{C}}$ per ogni $m \in \mathbb{Z}$. In particolare per $m = n - k$ si ha

$$\begin{aligned}
 \varphi_{n-k} - \psi_{n-k} &= \partial_{n-k+1}^{\mathcal{D}} \circ \Sigma_{m-k} + \Sigma_{m-k-1} \circ \partial_{m-k}^{\mathcal{C}} \\
 (\varphi[k])_n - (\psi[k])_n &= (-1)^k (\partial^{\mathcal{D}}[k])_n \circ (\Sigma[k])_n + (\Sigma[k])_{n-1} \circ (\partial^{\mathcal{C}}[k])_n
 \end{aligned}$$

ossia $\varphi[k]_n - \psi[k]_n = \partial_{n+1}^{\mathcal{D}[k]} \circ \Sigma[k]_n + \Sigma[k]_{n-1} \circ \partial_n^{\mathcal{C}[k]}$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, mostrando quanto voluto.

Osservazione 1.5: Un risultato duale continua a valere per i complessi di cocatene e l'associata categoria dell'omotopia: in quel caso il funtore di sospensione è ancora lo shift $(-)[1]$; la dimostrazione che la sospensione scende a $\text{Kom}(\mathbf{A})$ è identica.

I triangoli distinti della struttura triangolata su $\text{Kom}(\mathbf{A})$ sono ottenuti a partire dai cosiddetti *coni mappanti* di un morfismo di catene.

Definizione 1.10 [CONO MAPPANTE]: Data una mappa di catene $\varphi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, il *cono mappante*, o *mapping cone* di φ è il complesso di catene $M(\varphi)$ definito da

$$\begin{cases} M(\varphi)_n = X_{n-1} \oplus Y_n \\ \partial_n^{M(\varphi)} = \begin{pmatrix} -\partial_{n-1}^{\mathcal{X}} & 0 \\ \varphi_{n-1} & \partial_n^{\mathcal{Y}} \end{pmatrix} \end{cases} \tag{1.30}$$

Osservazione 1.6 : Si possono definire morfismi canonici in $\text{Cplx}(\mathbf{A})$,

$$\begin{aligned} \alpha(\varphi): \mathcal{Y} &\rightarrow M(\varphi) & \alpha(\varphi)_n &:= \begin{pmatrix} 0 \\ \text{id}_{\mathcal{Y}_n} \end{pmatrix} \\ \beta(\varphi): M(\varphi) &\rightarrow \mathcal{X}[1] & \beta(\varphi)_n &:= \begin{pmatrix} \text{id}_{\mathcal{X}_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Direttamente da questa definizione segue che esiste una sequenza esatta corta in $\text{Cplx}(\mathbf{A})$

$$0 \longrightarrow \mathcal{Y} \xrightarrow{\alpha} M(\varphi) \xrightarrow{\beta} \mathcal{X}[1] \longrightarrow 0 \quad (1.31)$$

Osservazione 1.7 : Per ogni mappa di catene φ la sequenza esatta corta **1.31** è spezzante, ossia esiste una mappa di catene $\sigma: \mathcal{X}[1] \rightarrow \mathcal{Y}$ tale che $\beta(\varphi) \circ \sigma = \text{id}$, se e solo se φ è omotopa a zero. In effetti, se Σ è una omotopia che realizza questa identificazione, una sezione di $\beta(\varphi)$ è data precisamente da $(\text{id} - \Sigma)$.

È altrettanto facile verificare che anche i morfismi $\alpha(\varphi)$ e $\beta(\varphi)$ passano all'omotopia, nel senso che $\varphi \sim \psi$ implica che $\alpha(\varphi) \sim \alpha(\psi)$, $\beta(\varphi) \sim \beta(\psi)$. I triangoli distinti in $\text{Kom}(\mathbf{A})$ saranno allora quelli isomorfi (modulo omotopia) ai triangoli canonici

$$X \xrightarrow{\varphi} \mathcal{Y} \xrightarrow{\alpha(\varphi)} M(\varphi) \xrightarrow{\beta(\varphi)} \mathcal{X}[1] \quad (1.32)$$

Esempio 2. Raccogliamo in un unico esempio vari risultati.

- Per ogni complesso X si consideri la mappa zero $\varphi: X \rightarrow 0$. Allora il cono mappante $M(\varphi)$ coincide con $X[1]$. Allo stesso modo ci si rende conto che $M(\psi) \cong \mathcal{Y}$ per $\psi: 0 \rightarrow \mathcal{Y}$.
- Dati due oggetti di \mathbf{A} , e un morfismo tra essi, diciamo $f: X \rightarrow Y$, il cono mappante $M(\varphi_f)$ coincide col complesso che ha f concentrato al grado zero,

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \quad (1.33)$$

- Il cono mappante dell'identità di un complesso $X = (X_n, \partial_n)$ è nullo-motopo, come è facile verificare osservando che $M(\text{id}_X) = \begin{pmatrix} X_{n-1} \oplus X_n, \begin{pmatrix} -\partial_{n-1} & 0 \\ \text{id}_{X_{n-1}} & \partial_n \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ è equivalente a zero mediante l'omotopia $\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & \text{id}_{X_n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Fatta questa doverosa introduzione, resta da verificare che, nelle notazioni della Definizione **1.9**, la coppia $(\text{Kom}(\mathbf{A}), (-)[1])$ è una categoria triangolata.

- Gli assiomi TR_1 e TR_3 sono validi, per come sono stati definiti i triangoli distinti.

1.2. CATEGORIE DERIVATE.

- TR2 è valido per come è definito il cono mappante: c'è sempre un triangolo distinto

$$X \xrightarrow{\text{id}_X} X \longrightarrow M(\text{id}_X) \longrightarrow X[1] \quad (1.34)$$

il quale (dato che $M(\text{id}_X)$ è omotopo a zero) è equivalente a

$$X \xrightarrow{\text{id}} X \longrightarrow 0 \longrightarrow X[1]. \quad (1.35)$$

- Per provare TR4 è sufficiente prendere un triangolo distinto

$$X \xrightarrow{f} \mathcal{Y} \xrightarrow{\alpha(\varphi)} M(\varphi) \xrightarrow{\beta(\varphi)} X[1]. \quad (1.36)$$

Dobbiamo provare che

$$\mathcal{Y} \xrightarrow{\varphi} M(\varphi) \xrightarrow{\beta(\varphi)} X[1] \xrightarrow{-\varphi[1]} \mathcal{Y}[1] \quad (1.37)$$

è isomorfo nella categoria dell'omotopia ad un triangolo standard. Scegliamo come triangolo standard quello relativo ad $\alpha(\varphi)$:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{Y} & \xrightarrow{\alpha(\varphi)} & M(\varphi) & \xrightarrow{\beta(\varphi)} & X[1] & \xrightarrow{-\varphi[1]} & \mathcal{Y}[1] \\ \parallel & & \parallel & & \eta \uparrow \downarrow \epsilon & & \parallel \\ \mathcal{Y} & \xrightarrow{\alpha(\varphi)} & M(\varphi) & \xrightarrow{\alpha(\alpha(\varphi))} & M(\alpha(\varphi)) & \xrightarrow{\beta(\alpha(\varphi))} & \mathcal{Y}[1] \end{array} \quad (1.38)$$

che ha mappe identiche in verticale, e in cui si definiscono

$$\epsilon: X[1] \longrightarrow M(\alpha(\varphi)) \quad (1.39)$$

$$X_{n-1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\varphi_{n-1} \\ \text{id}_{X_{n-1}} \\ 0 \end{pmatrix}} Y_{n-1} \oplus X_{n-1} \oplus Y_n$$

$$\eta: M(\alpha(\varphi)) \longrightarrow X[1] \quad (1.40)$$

$$Y_{n-1} \oplus X_{n-1} \oplus Y_n \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & \text{id}_{X_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}} X_{n-1}$$

e in cui si ricorda che $M(\alpha(\varphi))$ è il complesso

$$\left(\mathcal{Y}[1] \oplus M(\varphi), \begin{pmatrix} -\partial_{n-1}^{\mathcal{Y}} & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_{n-1}^X & 0 \\ \text{id}_{Y_n} & \varphi_{n-1} & \partial_n^{\mathcal{Y}} \end{pmatrix} \right) \quad (1.41)$$

Questa posizione definisce un morfismo di triangoli: infatti $\beta(\alpha(\varphi)) \circ \epsilon = (\text{id}_{X_{n-1}} \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} -\varphi_{n-1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\varphi_{n-1}$, $\epsilon \circ \beta(\varphi) \sim \alpha(\alpha(\varphi))$ mediante l'omotopia $\begin{pmatrix} 0 & -\text{id} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : M(\varphi)_n \rightarrow M(\alpha(\varphi))_{n+1}$ in modo che

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -\partial_n^{\mathcal{Y}} & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_n^x & 0 \\ \text{id}_{Y_{n+1}} & \varphi_n & \partial_{n+1}^{\mathcal{Y}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\text{id}_{Y_n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\text{id}_{Y_{n-1}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\partial_{n-1}^x & 0 \\ \varphi_{n-1} & \partial_n^{\mathcal{Y}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\varphi_{n-1} & 0 \\ 0 & -\text{id} \end{pmatrix} = \epsilon \circ \beta(\varphi) - \alpha(\alpha(\varphi)) \end{aligned}$$

Anche η è un morfismo di triangoli, perché $\beta(\varphi) = \eta \circ \alpha(\alpha(\varphi))$ per definizione, e $-\varphi[1] \circ \eta \sim \beta(\alpha(\varphi))$ con l'omotopia $(0 \ 0 \ 1) : M(\alpha(\varphi)) \rightarrow \mathcal{Y}[1]$:

$$\begin{aligned} \beta(\alpha(\varphi)) - (-\varphi[1] \circ \eta) &= (\text{id}_{Y_{n-1}} \ \varphi[1] \ 0) = \\ &= -\partial_n^{\mathcal{Y}} (0 \ 0 \ \text{id}) + (0 \ 0 \ \text{id}) \begin{pmatrix} -\partial_{n-1}^{\mathcal{Y}} & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_{n-1}^x & 0 \\ \text{id}_{Y_{n-1}} & \varphi_{n-1} & \partial_n^{\mathcal{Y}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da ultimo, e cosa più importante, η , ϵ sono mutualmente inverse a meno di omotopia: per $\eta \circ \epsilon$ in realtà c'è un'identità vera e propria, mentre per $\epsilon \circ \eta$ si consideri il diagramma

$$\begin{array}{ccccc} M(\alpha(\varphi))_{n+1} & \longrightarrow & M(\alpha(\varphi))_n & \xrightarrow{\partial_{n+1}^{M(\alpha\varphi)}} & M(\alpha(\varphi))_{n-1} & (1.42) \\ & \swarrow s_n & \downarrow \epsilon \circ \eta \quad \text{id} & \nwarrow s_{n-1} & \\ M(\alpha(\varphi))_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}^{M(\alpha\varphi)}} & M(\alpha(\varphi))_n & \longrightarrow & M(\alpha(\varphi))_{n-1} \end{array}$$

Si osservi che

$$\epsilon_n \circ \eta_n - \text{id}_{M(\alpha(\varphi))} = \begin{pmatrix} -\varphi_{n-1} \\ \text{id} \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ \text{id} \ 0) - \begin{pmatrix} \text{id} & 0 & 0 \\ 0 & \text{id} & 0 \\ 0 & 0 & \text{id} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{id} & -\varphi_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\text{id} \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

Dunque una omotopia tra le due mappe è $\Sigma_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\text{id}_{Y_n} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} -\partial_n^{\mathcal{Y}} & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_n^x & 0 \\ \text{id}_{Y_{n+1}} & \varphi_n & \partial_{n+1}^{\mathcal{Y}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\text{id}_{Y_{n+1}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\partial_{n-1}^{\mathcal{Y}} & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_{n-1}^x & 0 \\ \text{id}_{Y_n} & \varphi_{n-1} & \partial_n^{\mathcal{Y}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\text{id}_{Y_n} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.44)$$

- Per mostrare l'assioma di completamento basta considerare triangoli distinti: supponiamo di avere un diagramma del tipo

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{u} & \mathcal{Y} & \xrightarrow{\alpha(u)} & M(u) & \xrightarrow{\beta(u)} & X[1] \\
 \varphi \downarrow & & \downarrow \gamma & & \downarrow h & & \downarrow \varphi[1] \\
 X' & \xrightarrow{u'} & \mathcal{Y}' & \xrightarrow{\alpha(u')} & M(u') & \xrightarrow{\beta(u')} & X'[1]
 \end{array} \quad (1.45)$$

con il quadrato sinistro commutativo a meno di omotopie, ossia commutativo a meno di una famiglia di mappe $\{s_n: X_n \rightarrow Y'_{n+1}\}$ tali che $\gamma_n \circ u_n - u'_n \circ f_n = \partial_{n+1}^{Y'} \circ s_n + s_{n-1} \circ \partial_n^X$. Definiamo allora $h: M(u) \rightarrow M(u')$ come

$$X_{n-1} \oplus Y_n \xrightarrow{\begin{pmatrix} \varphi_{n-1} & 0 \\ s_{n-1} & \gamma_n \end{pmatrix}} X'_{n-1} \oplus Y'_n \quad (1.46)$$

La commutatività del seguente diagramma implica che questo sia un morfismo di complessi:

$$\begin{array}{ccc}
 X_n \oplus Y_{n+1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\partial & 0 \\ u & \partial \end{pmatrix}} & X_{n-1} \oplus Y_n \\
 \begin{pmatrix} \varphi_n & 0 \\ s_n & \gamma_{n+1} \end{pmatrix} \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} \varphi_{n-1} & 0 \\ s_{n-1} & \gamma_n \end{pmatrix} \\
 X'_n \oplus Y'_{n+1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\partial & 0 \\ u' & \partial \end{pmatrix}} & X'_{n-1} \oplus Y'_n
 \end{array} \quad (1.47)$$

Restano da verificare le uguaglianze $h \circ \alpha(u) = \alpha(u') \circ \gamma$ e $\beta(u') \circ h = \varphi[1] \circ \beta(u)$. Queste seguono facilmente (e non solo modulo omotopia, si tratta di uguaglianze vere e proprie) dal fatto che $\begin{pmatrix} \varphi_{n-1} & 0 \\ s_{n-1} & \gamma_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ \text{id} \end{pmatrix} \gamma_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_n \end{pmatrix}$, $(1 \ 0) \begin{pmatrix} \varphi_{n-1} & 0 \\ s_{n-1} & \gamma_n \end{pmatrix} = (\varphi_{n-1} \ 0)$, $\varphi_{n-1} (1 \ 0) = (\varphi_{n-1} \ 0)$

- L'assioma ottaedrale risulta il più lungo da verificare: disponiamo di un diagramma del tipo

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{u} & \mathcal{Y} & \xrightarrow{\alpha(u)} & M(u) & \xrightarrow{\beta(u)} & X[1] \\
 \parallel & & \downarrow v & & \downarrow f & & \parallel \\
 X & \xrightarrow{v \circ u} & Z & \xrightarrow{\alpha(vu)} & M(vu) & \longrightarrow & X[1] \\
 u \downarrow & & \parallel & & \downarrow g & & \downarrow u[1] \\
 \mathcal{Y} & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{\alpha(v)} & M(v) & \xrightarrow{\beta(v)} & \mathcal{Y}[1] \\
 \alpha(u) \downarrow & & \alpha(vu) \downarrow & & \parallel & \spadesuit & \downarrow \alpha(u)[1] \\
 M(u) & \cdots \xrightarrow{f} & M(vu) & \cdots \xrightarrow{g} & M(v) & \cdots \xrightarrow{h} & M(u)[1]
 \end{array} \quad (1.48)$$

e definiamo le frecce puntinate f, g, h come

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}: M(u) &\longrightarrow M(v \circ u) \\
 X_{n-1} \oplus Y_n &\xrightarrow{\begin{pmatrix} \text{id}_{X_{n-1}} & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}} X_{n-1} \oplus Z_n \\
 \mathbf{g}: M(v \circ u) &\longrightarrow M(v) \\
 X_{n-1} \oplus Z_n &\xrightarrow{\begin{pmatrix} u_{n-1} & 0 \\ 0 & \text{id}_{Z_n} \end{pmatrix}} Y_{n-1} \oplus Z_n \\
 \mathbf{h}: M(v) &\longrightarrow M(u)[1] \\
 Y_{n-1} \oplus Z_n &\xrightarrow{\alpha(u)[1] \circ \beta(v)} X_{n-2} \oplus Y_{n-1}
 \end{aligned}$$

(si osservi in particolare che la definizione di \mathbf{h} fa commutare per definizione il quadrato \spadesuit). Per concludere dobbiamo mostrare che questo è isomorfo a un triangolo standard: costruiamo dunque un isomorfismo con

$$M(u) \xrightarrow{f} M(v \circ u) \xrightarrow{\alpha(f)} M(f) \xrightarrow{\beta(f)} M(u)[1] \quad (1.49)$$

mediante il diagramma

$$\begin{array}{ccccccc}
 M(u) & \xrightarrow{f} & M(v \circ u) & \xrightarrow{g} & M(v) & \xrightarrow{h} & M(u)[1] \\
 \parallel & & \parallel & & \sigma \downarrow \uparrow \tau & & \parallel \\
 M(u) & \xrightarrow{f} & M(v \circ u) & \xrightarrow{\alpha(f)} & M(f) & \xrightarrow{\beta(f)} & M(u)[1]
 \end{array} \quad (1.50)$$

Dobbiamo trovare σ, τ tali che

$$\begin{cases} \beta(\mathbf{f}) \circ \sigma \sim \mathbf{h} \\ \mathbf{h} \circ \tau \sim \beta(\mathbf{f}) \\ \sigma \circ \mathbf{g} \sim \alpha(\mathbf{f}) \\ \tau \circ \alpha(\mathbf{f}) \sim \mathbf{g} \end{cases} \quad (1.51)$$

In più va provato che le due mappe sono mutualmente inverse modulo omotopia. Col che siamo pressoché obbligati a definire

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \text{id}_{Y_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \text{id}_{Z_n} \end{pmatrix}, \quad \tau_n = \begin{pmatrix} 0 & \text{id}_{Y_{n-1}} & u_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{id}_{Z_n} \end{pmatrix} \quad (1.52)$$

1.2. CATEGORIE DERIVATE.

La prima e la quarta identità sono subito verificate perché valgono senza ricorso a nessuna omotopia (o se si preferisce, con l'omotopia nulla). Per il resto, una omotopia tra $\alpha(\varphi)$ e $\sigma \circ g$ è $\begin{pmatrix} \text{id}_{X_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Per concludere troviamo una omotopia tra le mappe $\beta(\varphi)$ e $h \circ \tau$; la differenza delle due al grado n -esimo è

$$\begin{pmatrix} \text{id}_{X_{n-2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -u_{n-1} & 0 & 0 \end{pmatrix} : X_{n-2} \oplus Y_{n-1} \oplus X_{n-1} \oplus Z_n \rightarrow X_{n-2} \oplus Y_{n-1} \quad (1.53)$$

Un'omotopia tra tale mappa e lo zero è data da

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \text{id}_{X_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : X_{n-2} \oplus Y_{n-1} \oplus X_{n-1} \oplus Z_n \rightarrow X_{n-1} \oplus Y_n \quad (1.54)$$

L'ultima cosa da controllare è che σ e τ sono isomorfismi a meno di omotopia: la composizione $\tau \circ \sigma$ è già l'identità. La composizione inversa è la mappa

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{id}_{Y_{n-1}} & u_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{id}_{Z_n} \end{pmatrix} \quad (1.55)$$

l'omotopia cercata, come si verifica con un facile conto, è $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \text{id} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ciò conclude la prova dell'assioma ottaedrale, e mostra per intero la struttura di categoria triangolata della categoria dell'omotopia. \square

Osservazione 1.8 : Ad ogni triangolo distinto $X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\alpha(\varphi)} M(\varphi) \xrightarrow{\beta(\varphi)} X[1]$ in $\text{Kom}(\mathbf{A})$ corrisponde la sequenza esatta corta $0 \rightarrow Y \rightarrow M(\varphi) \rightarrow X[1] \rightarrow 0$ in $\text{Cplx}(\mathbf{A})$. Il viceversa però non è vero, come mostra il seguente esempio.

Esempio 3 . *Supponiamo per assurdo che la sequenza esatta*

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad (1.56)$$

origini un triangolo distinto

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{w} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[1] \quad (1.57)$$

dove si considerano gli oggetti come complessi concentrati al grado zero. Proprio perché tutti gli altri oggetti dei complessi considerati sono nulli, non ci sono morfismi non nulli $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{w} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[1]$, dunque deve essere $w = 0$; a questo punto dalla Proposizione 1.6 si evince che il triangolo in esame è spezzante. Allora $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ come complessi concentrati al grado zero, ossia a meno di omotopia. Ancora una volta però il fatto che i complessi siano concentrati al grado zero implica che l'isomorfismo sia vero e proprio: questo è palesemente assurdo.

1.2.2 Categoria Derivata di $\mathbf{Kom}(\mathbf{A})$.

Ovviare a questa asimmetria è una delle ragioni per cui si introduce la nozione di *categoria derivata* di una categoria di complessi. Scopo della parte seguente è di percorrere il filo di questa costruzione. Viene presentata, tra le tante, una costruzione esplicita ed elementare mutuata da [Gel], a cui a sua volta si ispira [Hol], che è il riferimento principale di questa sezione, soprattutto perché un approccio concreto si adatta meglio a ragionamenti espliciti. Le operazioni compiute si possono tuttavia inquadrare in una teoria generale, quella delle *localizzazioni* di categorie rispetto a sistemi moltiplicativi: nel caso specifico di una categoria di complessi, si localizza su un sistema moltiplicativo opportunamente ottenuto a partire dalla classe dei quasi-isomorfismi (ossia delle $\varphi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ tali che $H_n(\mathcal{X}) \rightarrow H_n(\mathcal{Y})$ è un isomorfismo per ogni $n \in \mathbb{Z}$). Si vedano [Nee] e [Kra] per maggiori informazioni: parte di questi argomenti è presentata nell'Appendice A.

Osservazione 1.9 : Rifiutiamo da ora in poi qualsiasi preoccupazione per sottigliezze di tipo fondazionale, ossia (come assunto nell'Appendice A) operiamo pensando di non uscire mai da un universo fissato.

Enunciamo il risultato principale nel seguente Teorema-Definizione:

Teorema-Definizione 1.1 : Sia \mathbf{A} una categoria abeliana. Allora esiste una coppia $(\mathbf{D}(\mathbf{A}), \mathcal{L})$ dove $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ è una categoria, e $\mathcal{L}: \mathbf{Kom}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathbf{A})$ è un funtore tale che

- $\mathcal{L}(q)$ è un isomorfismo, per ogni quasi-isomorfismo q di $\mathbf{Kom}(\mathbf{A})$;
- Ogni funtore $\mathcal{F}: \mathbf{Kom}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{C}$ che rende invertibili tutti i quasi-isomorfismi fattorizza in un solo modo lungo \mathcal{L} .

Osservazione 1.10 : Dal secondo dei due punti segue in particolare che $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ (una volta mostrato che esiste) è unica a meno di un'unica equivalenza di categorie, ossia la coppia $(\mathbf{D}(\mathbf{A}), \mathcal{L})$ è *universale* all'interno delle coppie $(\mathbf{C}, \mathcal{F})$ che rendono invertibili in \mathbf{C} tutti i quasi-isomorfismi di $\mathbf{Kom}(\mathbf{A})$.

Dimostrazione. La prova è del tutto costruttiva. Gli oggetti di $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ sono gli stessi di $\mathbf{Kom}(\mathbf{A})$, e per quanto concerne i morfismi, introduciamo in ogni $\mathrm{hom}_{\mathbf{Kom}(\mathbf{A})}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un elemento q^{-1} per ogni quasi-isomorfismo $q: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$, considerando poi “parole finite” del tipo

$$\varphi_1 \circ q_1^{-1} \circ \varphi_2 \circ q_2^{-1} \circ \dots \circ \varphi_r \circ q_r^{-1} \quad (1.58)$$

con la convenzione che q^{-1} si può comporre con φ se e solo se q^{op} (l'immagine di q nella categoria opposta) è componibile con f .

Per ottenere delle scritte minimali facciamo quello che si fa costruendo il monoide libero su un insieme, ossia quozientiamo per le relazioni che identificano

- $\dots \circ \varphi \circ \eta \circ \dots$ e $\dots \circ (\varphi \circ \eta) \circ \dots$;

1.2. CATEGORIE DERIVATE.

- $\dots \circ q^{-1} \circ r^{-1} \circ \dots$ e $\dots \circ (r \circ q)^{-1} \circ \dots$;
- $\dots \circ q \circ q^{-1} \circ \dots$ e $\dots \circ \text{id} \circ \dots$;
- ogni occorrenza del morfismo identico si può eliminare.

Quando questa è possibile, la composizione di morfismi si fa concatenando le parole e riducendole poi rispetto a tale relazione di equivalenza. In tal modo tutti gli assiomi sulla composizione e le identità necessari sono rispettati, come è facile verificare, e $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ diventa allora una categoria.

Il funtore $\mathcal{L} : \mathbf{Kom}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathbf{A})$ è poi definito come l'identità sugli oggetti, e con la corrispondenza sui morfismi che manda $f \in \text{hom}_{\mathbf{Kom}(\mathbf{A})}(X, \mathcal{Y})$ nella sua classe di equivalenza in $\mathbf{D}(\mathbf{A})$.

In particolare è immediato che l'immagine di ogni quasi-isomorfismo è per costruzione un isomorfismo, avendo come inverso q^{-1} .

Proviamo ora che $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ soddisfa alla giusta proprietà universale. Dato un funtore $\mathcal{F} : \mathbf{Kom}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{C}$ che rende invertibili i quasi-isomorfismi, definiamo $\mathcal{G} : \mathbf{D}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{C}$ come $\mathcal{G} \circ \mathcal{L}(X) = \mathcal{G}(X) = \mathcal{F}(X)$ sugli oggetti e come $\mathcal{G}(\varphi) := \mathcal{F}(\varphi)$, $\mathcal{G}(q^{-1}) := \mathcal{F}(q)^{-1}$, ed estendendo poi questa azione sulle parole di lunghezza arbitraria. È chiaro che questo \mathcal{G} è compatibile con la relazione di equivalenza, per il solo fatto di essere un funtore: per esempio

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\dots \circ q \circ q^{-1} \circ \dots) &= \dots \circ \mathcal{G}(q) \circ \mathcal{G}(q^{-1}) \circ \dots \\ &= \dots \circ \mathcal{F}(q) \circ \mathcal{F}(q)^{-1} \circ \dots \\ &= \dots \circ \text{id} \circ \dots \end{aligned}$$

Ogni altro funtore \mathcal{G}' tale che $\mathcal{G}' \circ \mathcal{L} = \mathcal{F}$ deve necessariamente coincidere con \mathcal{G} , semplicemente per costruzione. \square

Vi sono, comunque, ancora degli inconvenienti, dati dal fatto che le scritte del tipo **1.58** sono operativamente complicate da trattare, tanto che in generale è difficile dire persino se si da il caso che $\text{hom}_{\mathbf{D}(\mathbf{A})}(X, \mathcal{Y})$ sia o meno ridotto a un solo elemento.

Necessitiamo dunque di un metodo per sostituire **1.58** con una scrittura del tipo $\varphi \circ q^{-1}$, "twistando" cioè a due a due "numeratori" e "denominatori" delle "frazioni" che consideriamo: per farlo, necessitiamo delle proprietà di *sistema moltiplicativo* di cui gode la classe dei quasi-isomorfismi di $\mathbf{Kom}(\mathbf{A})$.

Lemma 1.4 : Sia $\mathbf{Kom}(\mathbf{A})$ la categoria dei complessi di catene modulo omotopia di \mathbf{A} . La classe $\mathbf{Q} = \text{qis}$ dei quasi-isomorfismi in $\mathbf{Kom}(\mathbf{A})$ soddisfa le seguenti proprietà

$$\text{LF1 } \text{id}_X \in \text{qis per ogni } X \in \text{Ob}_{\mathbf{Kom}(\mathbf{A})};$$

LF2 qis è chiusa per composizione

LF3 Dati $q \in \text{qis}$ e $\varphi \in \text{Kom}(\mathbf{A})$ uscenti o entranti da uno stesso oggetto, è possibile completare i diagrammi seguenti a quadrati commutativi, continuando le frecce puntinate:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{W} \xleftarrow{\dots\dots\dots} \mathcal{Z} & & \mathcal{W} \xrightarrow{\dots\dots\dots} \mathcal{Z} \\
 \uparrow \dots\dots\dots & \uparrow q & \downarrow \dots\dots\dots \\
 \mathcal{X} \xleftarrow{\varphi} \mathcal{Y} & & \mathcal{X} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{Y}
 \end{array} \quad (1.59)$$

LF4 Per ogni coppia di morfismi paralleli $f, g: X \rightrightarrows \mathcal{Y}$, esiste un quasi-isomorfismo che li coequalizza se e solo se ne esiste uno che li equalizza.

Dimostrazione. Le prime due proprietà sono evidenti. Per quanto riguarda la terza, sappiamo che ogni quasi-isomorfismo q si può inserire in un triangolo distinto

$$\mathcal{Z} \xrightarrow{q} \mathcal{Y} \xrightarrow{\nu} \mathcal{U} \xrightarrow{\eta} \mathcal{Z}[1] \quad (1.60)$$

e così anche $\nu \circ \varphi$:

$$\mathcal{W} \xrightarrow{\tau} \mathcal{X} \xrightarrow{\nu\varphi} \mathcal{U} \xrightarrow{\omega} \mathcal{W}[1] \quad (1.61)$$

Con l'assioma di rotazione e quello di completamento si può poi trovare una γ che completa il seguente morfismo di triangoli:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathcal{W} & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{X} & \xrightarrow{\nu\varphi} & \mathcal{U} & \xrightarrow{\omega} & \mathcal{W}[1] \\
 \gamma \downarrow \dots\dots\dots & & \downarrow \varphi & & \downarrow & & \downarrow \gamma[1] \dots\dots\dots \\
 \mathcal{Z} & \xrightarrow{q} & \mathcal{Y} & \xrightarrow{\nu} & \mathcal{U} & \xrightarrow{\eta} & \mathcal{Z}[1]
 \end{array} \quad (1.62)$$

La sequenza lunga in omologia (indotta dalle sequenze esatte di complessi che vengono dai triangoli distinti) è allora

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_n(\mathcal{W}) & \xrightarrow{H_n(\tau)} & H_n(\mathcal{X}) & \longrightarrow & H_n(\mathcal{U})^{-0} & \longrightarrow & \dots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 H_n(\mathcal{Z}) & \longrightarrow & H_n(\mathcal{Y}) & \longrightarrow & H_n(\mathcal{U})^{-0} & \longrightarrow & \dots \\
 & & & & & & \dots \longrightarrow H_{n-1}(\mathcal{W}) \xrightarrow{H_{n-1}(\tau)} H_{n-1}(\mathcal{X}) \\
 & & & & & & \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\
 & & & & \dots \longrightarrow & H_{n-1}(\mathcal{Z}) & \longrightarrow H_{n-1}(\mathcal{Y}).
 \end{array}$$

1.2. CATEGORIE DERIVATE.

Il fatto che $H_n(q)$ sia un isomorfismo per ogni $n \in \mathbb{Z}$, e l'esattezza delle sequenze, implica che $H_n(\mathcal{U}) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, e quindi che $H_n(\mathcal{W}) \rightarrow H_n(\mathcal{X})$ sia anch'esso un isomorfismo. L'altra condizione si verifica dualizzando tutto il ragionamento.

Resta da verificare l'ultima proprietà: supponiamo che $\varphi, \psi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ sia coequalizzata da $q \in \text{qis}$. Se poniamo $\eta = \varphi - \psi$, abbiamo che $q \circ \eta = 0$. Per l'assioma di rotazione possiamo inserire q in un triangolo distinto

$$\mathcal{Z} \xrightarrow{\nu} \mathcal{X} \xrightarrow{q} \mathcal{Y} \xrightarrow{\omega} \mathcal{Z}[1] \tag{1.63}$$

Però ora, se q è un quasi-isomorfismo, \mathcal{Z} deve essere un complesso aciclico; passando alla sequenza lunga in omologia

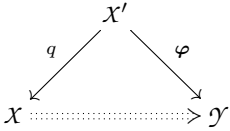
$$\underline{H}_{n+1}(\mathcal{Z})^{\neq 0} \longrightarrow H_n(\mathcal{X}) \longrightarrow H_n(\mathcal{Y}) \longrightarrow \underline{H}_n(\mathcal{Z})^{\neq 0} \longrightarrow \dots \tag{1.64}$$

Dunque $H_n(\varphi)$ è un isomorfismo per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

Adesso usiamo l'assioma di completamento per trovare $\nu: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$ tale che il diagramma

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{X} & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & \mathcal{X}[1] \\ \nu \downarrow \vdots & & \eta \downarrow & & \downarrow & & \nu[1] \downarrow \vdots \\ \mathcal{Z} & \xrightarrow{\nu} & \mathcal{Y} & \xrightarrow{q} & \mathcal{Y}' & \xrightarrow{\omega} & \mathcal{Z}[1] \end{array} \tag{1.65}$$

sia un morfismo di triangoli, e tale ν si inserisce in un triangolo distinto $\mathcal{X}' \xrightarrow{\tau} \mathcal{X} \xrightarrow{\nu} \mathcal{Z} \rightarrow^+$, in modo che τ sia un quasi-isomorfismo. Ora, per la Proposizione 1.3 $\nu \circ \tau = 0$, dunque $\eta \circ \tau = \nu \circ \nu\tau = 0 \Rightarrow \varphi \circ \tau = \psi \circ \tau$. L'altra implicazione si dimostra analogamente. \square



Le proprietà LF#, apparentemente artificiali, hanno l'utile conseguenza di lasciar scrivere ogni morfismo $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ di $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ come $\varphi \circ q^{-1}$, ossia come un "tetto" (roof, nei testi inglesi) del tipo " $\varphi \circ q^{-1}$ ".

Seguendo [Gel] è possibile definire una categoria $\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{A})$ che ha gli stessi oggetti di $\text{Kom}(\mathbf{A})$ e per morfismi $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ le coppie di tetti (q, φ) modulo la relazione che identifica (q, φ) e (t, ψ) se e solo se esiste un terzo tetto (r, η) che li "chiuda":

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{Z} & & \\ & & \swarrow r & \searrow \eta & \\ & \mathcal{X}' & & & \mathcal{X}'' \\ & \swarrow & \cdots \cdots \cdots & \searrow & \\ \mathcal{X} & & & & \mathcal{Y} \end{array} \tag{1.66}$$

La composizione di tetti è definita grazie alla proprietà LF3: avendo (q, φ) e (t, ψ) come in

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X' & & Y' & & \\
 & q \swarrow & & \searrow \varphi & & t \swarrow & \searrow \psi \\
 X & & & & Y & & Z
 \end{array} \tag{1.67}$$

si completa $X' \xrightarrow{\varphi} Y \xleftarrow{s} Y'$ ad un quadrato come quello a fianco, e allora la composizione

$$X \dashrightarrow Y \dashrightarrow Z \tag{1.68}$$

$$\begin{array}{ccc}
 Z' & \xrightarrow{\eta} & Y' \\
 \downarrow s & & \downarrow t \\
 X' & \xrightarrow{\varphi} & Y
 \end{array}$$

è la classe di equivalenza del tetto $(\psi \circ \eta, q \circ s)$.

Osservazione 1.11 : È facile dimostrare che la relazione ora introdotta è un’equivalenza sull’insieme delle coppie (q, φ) , e che la composizione di tetti è ben definita tra le sue classi; il quoziente di ogni $\text{hom}(X, Y)$ per tale equivalenza è allora l’insieme dei morfismi tra gli oggetti di una categoria che è equivalente a $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ (ne soddisfa infatti la proprietà universale), che dunque si può identificare a tutti gli effetti con $\mathbf{D}(\mathbf{A})$.

In base a tale osservazione, da ora indicheremo con $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ la categoria che ha gli stessi oggetti di $\text{Kom}(\mathbf{A})$ e per morfismi classi di equivalenza di “tetti”.

Proposizione 1.7 : $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ è una categoria additiva. □

Dimostrazione. Cfr. [Hol], Prop. 7.15.

Proposizione 1.8 : $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ è una categoria triangolata. □

Dimostrazione. Segue dal Lemma A.1 nell’Appendice A.

Ogni sequenza esatta corta induce un triangolo.

La categoria derivata, come promesso, annulla l’asimmetria osservata nell’Esempio 3; più precisamente, nella categoria derivata di una categoria di complessi ad ogni sequenza esatta corta si associa in modo naturale un triangolo distinto.

Definizione 1.11 [CILINDRO MAPPANTE]: Definiamo il *cilindro mappante* $\text{Cyl}(\varphi)$ di una mappa di catene $\varphi: X \rightarrow Y$ come il complesso di catene che ha per oggetti $X_n \oplus X_{n-1} \oplus Y_n$ e per differenziali

$$\begin{pmatrix} \partial_n^X - \text{id}_{X_{n-1}} & 0 \\ 0 & \partial_{n-1}^X & 0 \\ 0 & \varphi_{n-1} & \partial_n^Y \end{pmatrix} \tag{1.69}$$

È facile mostrare che questo è davvero un complesso di catene; consideriamo poi le mappe canoniche

$$\begin{aligned} \iota: X \rightarrow \text{Cyl}(\varphi): \iota_n &= (\text{id}_{X_n} \ 0 \ 0) \\ \pi: \text{Cyl}(\varphi) \rightarrow M(\varphi): \pi_n &= \begin{pmatrix} 0 & \text{id}_{X_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \text{id}_{Y_n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Lemma 1.5 : Esistono delle mappe di catene $\sigma: \mathcal{Y} \rightleftarrows \text{Cyl}(\varphi): \tau$ definite da $\sigma_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \text{id}_{Y_n} \end{pmatrix}$ e $\tau_n = (\varphi_n \ 0 \ \text{id}_{Y_n})$, tali che il diagramma

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{Y} & \xrightarrow{\alpha(\varphi)} & M(\varphi) & \xrightarrow{\beta(\varphi)} & X[1] \longrightarrow 0 & (1.70) \\ & & \vdots & & \downarrow & & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\iota} & \text{Cyl}(\varphi) & \xrightarrow{\pi} & M(\varphi) \longrightarrow 0 & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & \\ & & X & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{Y} & & & \end{array}$$

commuti in tutte le sue parti. I morfismi σ, τ sono quasi-isomorfismi, mutualmente inversi in $\text{Kom}(\mathbf{A})$: $\tau \circ \sigma = \text{id}_{\mathcal{Y}}$, e $\sigma \circ \tau \sim \text{id}_{\text{Cyl}(\varphi)}$.

Dimostrazione. È tutto immediato a partire dalla definizione delle due mappe di catene. \square

Corollario 2 : Per ogni sequenza esatta corta $0 \rightarrow X \xrightarrow{\varphi} \mathcal{Y} \rightarrow Z \rightarrow 0$ in $\text{Cplx}(\mathbf{A})$ esiste un triangolo nella categoria derivata $\mathbf{D}(\mathbf{A})$, della forma

$$X \xrightarrow{\varphi} \mathcal{Y} \rightarrow Z \rightarrow X[1] \quad (1.71)$$

Dimostrazione. Nel diagramma

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & \text{Cyl}(\varphi) & \longrightarrow & M(\varphi) \longrightarrow 0 & (1.72) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \gamma & \\ 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & \mathcal{Y} & \longrightarrow & Z \longrightarrow 0 & \end{array}$$

poniamo $\gamma_n = (0 \ g_n)$; essendo id e τ dei quasi-isomorfismi, per il Lemma dei 5 triangoli deve esserlo anche γ . Ora, si ha un morfismo di triangoli

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{Y} & \longrightarrow & M(\varphi) & \longrightarrow & X[1] & (1.73) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \gamma & & & \\ X & \longrightarrow & \mathcal{Y} & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X[1] & \end{array}$$

che è un isomorfismo, e si conclude. \square

1.2.3 Funtori Derivati.

È naturale chiedersi se la corrispondenza che manda una categoria di complessi nella sua categoria derivata sia functoriale. In effetti, con alcune cautele, essa lo è: se abbiamo un funtore \mathcal{F} esatto a sinistra (o a destra) possiamo associare ad ogni $\mathcal{X} \in \text{Ob}(\text{Cplx}(\mathbf{A}))$ un complesso $\mathfrak{R}\mathcal{F}(\mathcal{X})$ (o $\mathfrak{L}\mathcal{F}(\mathcal{X})$) in $\text{Cplx}(\mathbf{B})$ che dipende solo dalla classe di omotopia di \mathcal{X} e tale che

$$\begin{aligned} H^k(\mathfrak{R}\mathcal{F}(\mathcal{X})) &= \mathfrak{R}^k\mathcal{F}(\mathcal{X}). \\ (H_k(\mathfrak{L}\mathcal{F}(\mathcal{X})) &= \mathfrak{L}^k\mathcal{F}(\mathcal{X}).) \end{aligned}$$

Tutte le nostre considerazioni riguardano solo complessi *limitati*, e solo la loro coomologia. Chiaramente ogni affermazione si può rfrasare con opportune dualizzazioni; alcuni risultati smettono di essere validi se si considerano complessi non limitati (per esempio la Proposizione 1.9 e quanto segue da essa), ma questo non lede la generalità della discussione perché la più parte delle applicazioni geometriche che incontreremo riguarda complessi limitati (di fasci su una varietà).

Cominciamo dunque la costruzione dei *funtori derivati* di un funtore additivo ed esatto (da un lato: per evitare ridondanze si eviterà di ripetere esplicitamente tutte le dualizzazioni e si assumerà una volta per tutte che $\mathcal{F}: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ sia un funtore esatto a sinistra) rammentando un risultato generale.

Proposizione 1.9 : Sia $\varphi: \mathcal{X} \rightarrow I$ una mappa di catene da $\mathcal{X} \in \text{Cplx}^+(\mathbf{C})$ a $I \in \text{Cplx}^+(\text{Inj}(\mathbf{C}))$.

- Se \mathcal{X} è aciclico, $\varphi \sim 0$.
- Se I è aciclico, $1_I \sim 0$ (i.e., I è nullomotopo).

Dimostrazione. Il secondo asserto segue dal primo scegliendo $\mathcal{X} = I$ e $\varphi = 1_{\mathcal{X}}$. Proviamo dunque il primo. Si consideri

$$\begin{array}{ccccccc} X^{k-2} & \xrightarrow{\delta^x} & X^{k-1} & \xrightarrow{\delta^x} & X^k & \xrightarrow{\delta^x} & X^{k+1} \\ & \swarrow s^{k-1} & \downarrow \varphi^{k-1} & \swarrow s^k & \downarrow \varphi^k & \swarrow s^{k+1} & \\ I^{k-2} & \xrightarrow{\delta^l} & I^{k-1} & \xrightarrow{\delta^l} & I^k & \xrightarrow{\delta^l} & I^{k+1} \end{array} \quad (1.74)$$

È possibile costruire direttamente una omotopia $\{s^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ tale che $\varphi^k = s^{k+1} \circ \delta^k + \delta^{k-1} \circ s^k$, procedendo induttivamente. Per cominciare, si può scegliere $s^k = 0$ per ogni $k \leq 0$, s_0 si può fissare arbitrariamente, e si può definire $g^k = f^k - \delta^{k-1} \circ s^k$. Si vede facilmente che $g^k \circ \delta^{k-1} = 0$, e dunque g^k si fattorizza attraverso $\text{coker } \delta^{k-1}$

in

$$\begin{array}{ccc}
 X^{k-1} & \xrightarrow{\delta^{k-1}} & X^k & \twoheadrightarrow & \text{coker } \delta^{k-1} \\
 & & \downarrow g^k & & \nearrow \tilde{g}^k \\
 & & I^k & &
 \end{array}
 \quad (1.75)$$

portendo una $\tilde{g}^k: \text{coker } \delta^{k-1} \rightarrow I^k$. Ora si consideri

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \longrightarrow & \text{coker } \delta^{k-1} & \longrightarrow & X^{k+1} \\
 & & \downarrow \tilde{g}^k & & \nearrow \kappa \\
 & & I^k & &
 \end{array}
 \quad (1.76)$$

Grazie all'iniettività di I^k si può completare la freccia puntinata. \square

tutte le verifiche che restano sono banali.

Teorema 1.1 : Se $\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ è un quasi-isomorfismo, ed entrambi i complessi sono fatti da iniettivi, allora f è già invertibile, ossia esiste una mappa di cocatene $\gamma: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ tale che $\varphi \circ \gamma, \gamma \circ \varphi$ siano omotope alle rispettive identità.

Dimostrazione. Se $\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ è un quasi-isomorfismo, il cono mappante di φ è aciclico, quindi gli si applica la Proposizione 1.9, portendo un'omotopia tra $\beta(\varphi)$ e il complesso zero. Sia κ tale omotopia: la sua componente n -esima è $\kappa_n = (k_n, t_n)$, dove $k_n: X_{n+1} \rightarrow X_n$ e $t_n: Y_n \rightarrow X_n$. La condizione per cui

$$\beta(\varphi) = \partial_n^X (k_n \ t_n) + (k_{n+1} \ t_{n+1}) \begin{pmatrix} -\partial_{n+1}^X & 0 \\ \varphi_{n+1} & \partial_n^Y \end{pmatrix} \quad (1.77)$$

si riscrive come

$$\begin{cases} \partial_n^X t_n + t_{n+1} \partial_n^Y = 0 \\ \partial_n^X k_n - k_{n+1} \partial_{n+1}^X + t_{n+1} \varphi_{n+1} = \text{id}_{X_{n+1}} \end{cases} \quad (1.78)$$

La prima di queste due uguaglianze dice che t_n sono le componenti di una mappa di catene $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$, la seconda dice che la composizione $t \circ \varphi$ è omotopa all'identità. \square

Teorema 1.2 : Se \mathbf{A} ha abbastanza iniettivi, ogni complesso \mathcal{X} in $\text{Kom}(\mathbf{A})$ è quasi-isomorfo ad un complesso di oggetti iniettivi.

Osservazione 1.12 : Il risultato è più generale di quanto qui affermato e non coinvolge prettamente gli iniettivi: se \mathbf{J} è una famiglia cogenerante di una categoria abeliana \mathbf{C} (ossia se ogni oggetto di \mathbf{C} ammette un monomorfismo verso un oggetto di \mathbf{J}) allora ogni complesso a valori in \mathbf{C} è quasi-isomorfo ad un complesso fatto di oggetti di \mathbf{J} . Anche la dimostrazione che segue è *minimale* per raggiungere il risultato, e non coinvolge prettamente gli iniettivi (è sufficiente generalizzare ogni occorrenza di questa parola).

Dimostrazione. Se $X: 0 \rightarrow X^0 \rightarrow X^1 \rightarrow X^2 \rightarrow \dots$ è un complesso in $\text{Kom}(\mathbf{A})$, immergiamo X^0 in un iniettivo e consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} X^0 & \xrightarrow{\delta_0} & X^1 \\ \downarrow & & \downarrow p_1 \\ J^0 & \xrightarrow{q_1} & Y^1 \end{array} \quad (1.79)$$

in cui $Y^1 \cong J^0 \amalg_{X^0} X^1$. Per la proprietà universale del pushout, esiste una sola $u: Y_1 \rightarrow X_2$ che fattorizza δ^1 (come freccia $J^0 \rightarrow X^2$ può essere presa la freccia zero perché $\delta^1 \circ \delta^0 = 0$). Ora si immerga Y^1 in un iniettivo J^1 e si ripeta il ragionamento: otteniamo il diagramma

$$\begin{array}{ccccccc} X^0 & \xrightarrow{\delta^0} & X^1 & \xrightarrow{\delta^1} & X^2 & \xrightarrow{\delta^2} & X^3 \\ \downarrow \iota_0 & & \downarrow p_1 & \nearrow ! & \downarrow ! & \nearrow ! & \downarrow ! \\ J^0 & \longrightarrow & Y^1 & & Y^2 & & Y^3 \\ & & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\ & & J^1 & & J^2 & & \end{array} \quad (1.80)$$

che porge il complesso

$$0 \rightarrow J^0 \rightarrow J^1 \rightarrow J^2 \rightarrow \dots \quad (1.81)$$

Ancora da questa costruzione resta determinata una mappa di catene $X \rightarrow J$ che è un monomorfismo (lo è grado per grado): consideriamo ora il cono mappante di quest'ultima; ricordando che il quadrato commutativo iniziale è un pushout se e solo se la sequenza

$$0 \rightarrow X^0 \xrightarrow{\begin{pmatrix} \delta^0 \\ -\iota_0 \end{pmatrix}} X^1 \oplus J^0 \xrightarrow{(p_1 \ q_1)} Y^1 \rightarrow 0$$

è esatta (e altrettanto accade ad ogni grado), si conclude che il cono mappante di $X \rightarrow J$ è aciclico, e che quindi quest'ultimo è un quasi-isomorfismo. \square

Teorema 1.3 : Se \mathbf{A} ha abbastanza iniettivi, e chiamiamo $\text{Kom}(\text{Inj}(\mathbf{A}))$ la sottocategoria di $\text{Kom}(\mathbf{A})$ i cui oggetti sono iniettivi, allora c'è una equivalenza

$$\mathcal{W}: \mathbf{D}^+(\mathbf{A}) \cong \text{Kom}^+(\text{Inj}(\mathbf{A})). \quad (1.82)$$

Dualmente, se \mathbf{A} ha abbastanza proiettivi, $\mathbf{D}^-(\mathbf{A}) \cong \text{Kom}^-(\text{Proj}(\mathbf{A}))$.

Dimostrazione. È il Teorema 10.4.8 di [Wei], che a sua volta si basa sul Corollario 10.3.14 *ibid.* e sui risultati dimostrati finora: nelle notazioni della Definizione A.1 nell'Appendice, una sottocategoria \mathbf{B} di \mathbf{C} si dice *localizzante* se il funtore naturale $\mathbf{B}[(\mathbf{B} \cap \mathbf{S})^{-1}] \rightarrow \mathbf{C}[\mathbf{S}^{-1}]$ è pienamente fedele. Se \mathbf{B} è localizzante in \mathbf{C} e per ogni $C \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ esiste una freccia $f \in \text{hom}_{\mathbf{S}}(C, B)$ con $B \in \mathbf{B}$, allora il funtore naturale in oggetto è anche essenzialmente suriettivo (e quindi una equivalenza). Il fatto che ogni complesso ammetta un quasi-isomorfismo verso un iniettivo è il contenuto del Teorema 1.2; il fatto che ogni quasi-isomorfismo tra iniettivi sia già un isomorfismo è il contenuto del Teorema precedente. \square

Proposizione 1.10 : Sia $\mathcal{F}: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ un funtore esatto a sinistra tra categorie abeliane. Allora \mathcal{F} induce un funtore esatto

$$\tilde{\mathcal{F}}: \text{Kom}^+(\text{Inj}(\mathbf{A})) \rightarrow \text{Kom}^+(\mathbf{B}) \quad (1.83)$$

che si ottiene applicando \mathcal{F} direttamente ad un complesso di iniettivi in \mathbf{C} .

Definizione 1.12 : Se \mathbf{A} è una categoria abeliana con abbastanza iniettivi, e $\mathcal{F}: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ è esatto a sinistra, fissata un'inversa dell'equivalenza del Teorema 1.3, definiamo $\mathfrak{R}\mathcal{F}$, il *funtore derivato destro* di \mathcal{F} , come la composizione

$$\mathfrak{R}\mathcal{F}: \mathbf{D}^+(\mathbf{A}) \xrightarrow{\mathcal{W}^{-1}} \text{Kom}^+(\text{Inj}(\mathbf{A})) \xrightarrow{\mathcal{F}} \text{Kom}^+(\mathbf{B}) \xrightarrow{\mathcal{Q}} \mathbf{D}^+(\mathbf{B}) \quad (1.84)$$

Esso risulta dalla composizione di frecce nel diagramma

$$\begin{array}{ccccc} \text{Kom}^+(\text{Inj}(\mathbf{A})) & \hookrightarrow & \text{Kom}^+(\mathbf{A}) & \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}} & \text{Kom}^+(\mathbf{B}) & (1.85) \\ & \searrow \mathcal{W}^{-1} & \downarrow \mathcal{Q}_A & & \downarrow \mathcal{Q}_B \\ & & \mathbf{D}^+(\mathbf{A}) & \xrightarrow{\mathfrak{R}\mathcal{F}} & \mathbf{D}^+(\mathbf{B}) \end{array}$$

Osservazione 1.13 : Si noti cosa accade nel caso in cui vogliamo calcolare $\mathfrak{R}\mathcal{F}(A)$ per un oggetto $A \in \mathbf{A}$: $I = \mathcal{W}^{-1}(A)$ è un complesso di iniettivi che è quasi-isomorfo al complesso con A concentrato al grado zero (non si tratta altro che di una risoluzione iniettiva nel vecchio senso). Si applica \mathcal{F} a questo complesso, e lo si guarda in $\mathbf{D}^+(\mathbf{B})$. Il risultato, per costruzione, porge l'uguaglianza

$$H^k(\mathfrak{R}\mathcal{F}(A)) = H^k(\mathcal{F}(I_A)) = \mathfrak{R}^k\mathcal{F}(A). \quad (1.86)$$

Osservazione 1.14 : Vi sono due ragioni per cui il passaggio alle categorie derivate consiste in un vantaggio tecnico: la prima è che la relazione

$$\mathfrak{R}(\mathcal{F} \circ \mathcal{G}) \cong \mathfrak{R}\mathcal{F} \circ \mathfrak{R}\mathcal{G} \quad (1.87)$$

che uno si aspetta di ottenere, è effettivamente valida (nella categoria derivata si aggira il problema per cui calcolare il funtore derivato della composizione di due funtori $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ è difficile, nella misura in cui non è detto che il complesso $\mathcal{G}(I)$ sia ancora fatto di iniettivi: è sufficiente sostituire quest'ultimo con un qualsiasi complesso che gli sia quasi-isomorfo, fatto di iniettivi).

Senza spostarsi in questo ambiente, il massimo che si può sperare di ottenere è una sequenza spettrale abbastanza docile da calcolare, che converga al funtore derivato della composizione (il quale calcolo rimane comunque necessario nel momento in cui sia richiesto un valore “esplicito” per $\mathfrak{R}(\mathcal{F} \circ \mathcal{G})(A)$).

In secondo luogo, considerando funtori derivati tra categorie derivate, si considerano sempre funtori esatti, per costruzione: questo permette, per esempio, di trasportare immutati molti risultati che prima valevano a ipotesi restrittive. Consideriamo per esempio una categoria di fasci, nella fattispecie la categoria $\mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X)$ dei fasci coerenti di \mathcal{O}_X -moduli su una varietà X ; si possono dimostrare i risultati seguenti (per le notazioni si rimanda al capitolo successivo)

- Formula di proiezione: se $f: X \rightarrow Y$ è un morfismo di varietà, ed $\mathcal{E} \in \mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X)$, $\mathcal{F} \in \mathbf{D}_{\text{coh}}^b(Y)$, si ha

$$\mathfrak{R}f_*(\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}} \mathbb{L}f^* \mathcal{F}) \cong \mathfrak{R}f_* \mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{F} \quad (1.88)$$

- Formula di dualizzazione: se $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X)$ si ha

$$\mathfrak{R} \text{hom}_X(\mathcal{E}, \mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{G}) \cong \mathfrak{R} \text{hom}_X(\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{F}^\vee, \mathcal{G}) \quad (1.89)$$

- Formula del cambio di base: se il diagramma

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{v} & X \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{u} & Y \end{array} \quad (1.90)$$

è un pullback, allora

$$u^* \circ \mathfrak{R}f_* \cong \mathfrak{R}g_* \circ v^*. \quad (1.91)$$

Si noti che **1.88** è la “versione derivata” del morfismo canonico in **2.14**. L’idea è di sfruttare quello per trovare una freccia $\mathfrak{R}f_* \mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{F} \rightarrow \mathfrak{R}f_*(\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}} \mathbb{L}f^* \mathcal{F})$: la dimostrazione si può trovare in [Bar].

1.3 Una applicazione: struttura di $\mathbf{D}_{\text{coh}}^b(\mathbb{P}^n)$.

Lo scopo di questa sezione è mostrare che esiste un modo di presentare la categoria derivata dei fasci coerenti su $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, $\mathbf{D}_{\text{coh}}^b(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$, mediante *generatori e relazioni*.

Definizione 1.13 : Diciamo che una categoria triangolata $(\mathbf{C}, \mathcal{S})$ è *generata* da una famiglia di oggetti $\{X_i\}_{i \in I}$ se la più piccola sottocategoria triangolata di \mathbf{C} che contiene tutti gli X_i coincide con \mathbf{C} . Equivalentemente, la categoria è generata da una famiglia di oggetti $\{X_i\}_{i \in I}$ se ogni oggetto si ottiene dagli X_i mediante shift e passaggi ai mapping cones di morfismi tra oggetti della famiglia.

La sezione è interamente votata a dimostrare il seguente

Teorema 1.4 : La categoria $\mathbf{D}_{\text{coh}}^b(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ è generata dalla famiglia di oggetti

$$\{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n+1), \dots, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}\} \quad (1.92)$$

Osservazione 1.15 : Tale famiglia è anche una cosiddetta *sequenza eccezionale*: questo significa che per ogni coppia di oggetti A_p, A_q si ha

$$\text{Ext}^i(A_p, A_q) = 0 \quad p < q \quad (1.93)$$

$$\text{Ext}^i(A_p, A_p) = \begin{cases} 0 & i > 0 \\ \mathbb{C} & i = 0. \end{cases} \quad (1.94)$$

Per cominciare rammentiamo una costruzione classica in algebra commutativa: il complesso di Koszul associato ad un omomorfismo di R -moduli.

Definizione 1.14 : Sia R un anello commutativo, ed $E \in \text{Mod}(R)$ un R -modulo libero e finitamente generato (indichiamo con $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una sua base). Sia $d_1: E \rightarrow R$ un omomorfismo di R -moduli, ed $I \leq R$ l'ideale dell'immagine di d_1 , in modo che $R/I \cong \text{coker } d_1$.

Proposizione 1.11 : La sequenza

$$0 \rightarrow \bigwedge^n E \xrightarrow{d_n} \bigwedge^{n-1} E \xrightarrow{d_{n-1}} \bigwedge^{n-2} E \rightarrow \dots \rightarrow \bigwedge^1 E \xrightarrow{d_1} R \rightarrow 0 \quad (1.95)$$

è un complesso di R -moduli, detto *complesso di Koszul* relativo a d_1 , e denotato con $\mathcal{K}(d_1)$, se ne definiamo i differenziali ponendo

$$d_p(t_1 \wedge \dots \wedge t_p) = \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} d_1(t_j) t_1 \wedge \dots \wedge \widehat{t_j} \wedge \dots \wedge t_p \quad (1.96)$$

(con la solita convenzione per cui il simbolo sotto cappuccio viene omissso: per brevità nel seguito indicheremo $t_{i_1} \wedge \dots \wedge t_{i_p}$ con t_{I_p}).

Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ è una base di E , una base di $\bigwedge^p E$ è fatta da $\{e_I \mid I = \{i_1 < \dots < i_p\}\}$. Supponiamo ora che I sia generato da n elementi $\{a_1, \dots, a_n\}$, in modo che $d_1(e_i) = a_i$ (non è detto che questo insieme di generatori sia minimale, se d_1 non è iniettiva). Il differenziale del complesso (1.95) si può allora scrivere in termini della base $\{e_1, \dots, e_n\}$ come

$$d_p(e_{I_p}) = \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} a_{i_j} e_{I_p \setminus \{i_j\}}. \quad (1.97)$$

Definizione 1.15 : Nelle notazioni precedenti diciamo che, se $I = (a_1, \dots, a_n)$, $\{a_1, \dots, a_n\}$ è una *sequenza regolare* se a_i non è divisore dello zero in $R/(a_1, \dots, a_{i-1})$ (e dunque a_1 non è divisore dello zero in R).

Definizione 1.16 : Diciamo *complesso di Koszul aumentato*, $\mathcal{K}(d_1)^+$, relativo a $d_1: E \rightarrow R$ la sequenza

$$0 \rightarrow \bigwedge^n E \rightarrow \bigwedge^{n-1} E \rightarrow \dots \rightarrow E \rightarrow R \rightarrow R/I \rightarrow 0 \quad (1.98)$$

Proposizione 1.12 : • Se I è generato da una sequenza regolare, il complesso di Koszul aumentato è esatto, e dunque è una risoluzione libera di R/I .

- Se (R, \mathfrak{m}) è locale e noetheriano, $I \leq \mathfrak{m}$ e se il complesso di Koszul aumentato è esatto, allora I è generato da una sequenza regolare.
- Se $I = (1)$, allora il complesso di Koszul aumentato è esatto.

Dimostrazione. Vedi [FLa], pag. 71 e segg. □

Si può trasportare praticamente immutata questa costruzione al caso di fasci localmente liberi: se \mathcal{E} è uno di tali fasci su una varietà X , e se $n = \text{rk } \mathcal{E}$, per ogni $d_1: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_X$ possiamo definire il complesso di Koszul

$$0 \rightarrow \bigwedge^n \mathcal{E} \xrightarrow{d_n} \bigwedge^{n-1} \mathcal{E} \xrightarrow{d_{n-1}} \bigwedge^{n-2} \mathcal{E} \rightarrow \dots \rightarrow \bigwedge^1 \mathcal{E} \xrightarrow{d_1} \mathcal{O}_X \rightarrow 0 \quad (1.99)$$

dove il differenziale è definito da

$$d_p(t_{I_p}) = \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} d_1(t_j) t_{I_p \setminus \{j\}}. \quad (1.100)$$

Osservazione 1.16 : Se $\mathcal{E} \xrightarrow{d_1} \mathcal{O}_X \rightarrow 0$ è esatta, dalla Proposizione 1.12 segue che il complesso di Koszul (1.99) è esatto in $\text{Mod}(\mathcal{O}_X)$, perché localmente si tratta di un complesso analogo a quello costruito in precedenza. Questa risoluzione prende il nome di *risoluzione di Koszul di \mathcal{O}_X relativa a d_1* .

Ogni sezione $s \in \Gamma(X, \mathcal{E})$ induce (per dualità) un omomorfismo $s^\vee: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_X$, a cui si può associare un complesso di Koszul $\mathcal{K}(s)^\dagger$.

L'immagine di s^\vee ora è un fascio di ideali di \mathcal{O}_X , che determina univocamente (cfr. [Har], pag. 116, Corollario 5.10) un sottoschema chiuso di X che denotiamo Z_s . Otteniamo il complesso di Koszul associato ad s ,

$$0 \rightarrow \bigwedge^n \mathcal{E}^\vee \xrightarrow{d_n} \bigwedge^{n-1} \mathcal{E}^\vee \xrightarrow{d_{n-1}} \bigwedge^{n-2} \mathcal{E} \rightarrow \dots \rightarrow \bigwedge^1 \mathcal{E}^\vee \xrightarrow{d_1} \mathcal{O}_X \rightarrow 0 \quad (1.101)$$

ponendo $d_p(t_{I_p}) = \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} t_j(s) t_{I_p \setminus \{j\}}$.

Dalla Proposizione 1.12 si deduce rapidamente (cfr. [FLa], pag. 76) che il complesso di Koszul $\mathcal{K}(s)$ è una risoluzione di \mathcal{O}_{Z_s} se e solo se le coordinate (a_1, \dots, a_n) di $s_x \in \mathcal{E}_x$ -riguardato come $\mathcal{O}_{X,x}$ -modulo libero- sono una sequenza regolare, per qualche $x \in Z_s$.

Quando una di queste condizioni è verificata, diciamo *risoluzione di Koszul di \mathcal{O}_{Z_s} determinata da s* il complesso

$$0 \rightarrow \bigwedge^n \mathcal{E}^\vee \xrightarrow{d_n} \bigwedge^{n-1} \mathcal{E}^\vee \rightarrow \dots \rightarrow \bigwedge^1 \mathcal{E}^\vee \xrightarrow{d_1} \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_{Z_s} \rightarrow 0 \quad (1.102)$$

Lemma 1.6 [RISOLUZIONE DI BEĪLINSON]: Esiste una risoluzione di fasci localmente liberi di \mathcal{O}_Δ , dove $\Delta \hookrightarrow \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ è la diagonale:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n) \boxtimes \Omega^n(n) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n+1) \boxtimes \Omega^{n-1}(n-1) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \boxtimes \Omega^1(1) \rightarrow \mathcal{O} \boxtimes \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_\Delta \rightarrow 0. \quad (1.103)$$

Dimostrazione. Scegliamo una base di $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1)) = \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1))$, $\{y_0, \dots, y_n\}$. È noto (cfr. [Har], Teorema 8.13) che esiste una sequenza esatta corta del tipo $0 \rightarrow \Omega \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{n+1} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow 0$, dove Ω è il fascio delle forme differenziali di \mathbb{P}^n ; dualizzandola e twistandola con $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ otteniamo

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{n+1} \rightarrow \mathcal{T}(-1) \rightarrow 0 \quad (1.104)$$

dove \mathcal{T} è il fascio tangente a \mathbb{P}^n . Dal momento che $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ non ha sezioni globali, otteniamo un isomorfismo $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}^{n+1}) \cong H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{T}(-1))$. Scegliamo $\{y_0^\vee, \dots, y_n^\vee\}$ come base di $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}^{n+1})$ (è la base duale a $\{y_0, \dots, y_n\}$ perché questi due spazi sono in dualità), e denotiamo con $\frac{\partial}{\partial y_i}$ l'immagine di y_i^\vee nell'isomorfismo appena trovato.

Consideriamo ora la sezione globale del fascio $\mathcal{O}(1) \boxtimes \mathcal{T}(-1)$ su $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ definita da

$$s = \sum_{i=0}^n x_i \boxtimes \frac{\partial}{\partial y_i} \quad (1.105)$$

dove si indicano con $\{x_i\}$ le coordinate nel primo \mathbb{P}^n e con $\{y_i\}$ nel secondo. Gli zeri di s sono localizzati lungo la diagonale di $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$.

Questo si verifica prendendo un ricoprimento di \mathbb{P}^n fatto di aperti affini (senza perdita di generalità, scegliamo $U_0 \times U_0$, dove $x_0 \neq 0 \neq y_0$). Definiamo delle coordinate affini ponendo $Y_i = y_i/y_0$, per $1 \leq i \leq n$. Da ciò, considerando che $dY_i = \frac{y_0 dy_i - y_i dy_0}{y_0^2}$, segue che

$$\frac{\partial}{\partial y_i} = \sum_{k=1}^n dY_k(\partial/\partial y_i) \frac{\partial}{\partial Y_k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{y_0} \delta_{ik} \frac{\partial}{\partial Y_k} = \frac{1}{y_0} \frac{\partial}{\partial Y_i} \quad (1.106)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_0} = \sum_{k=1}^n dY_k(\partial/\partial y_0) \frac{\partial}{\partial Y_k} = - \sum_{k=1}^n \frac{y_k}{y_0^2} \frac{\partial}{\partial Y_k} \quad (1.107)$$

Dunque

$$s = \sum_{i=0}^n x_i \boxtimes \frac{\partial}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y_0} \frac{\partial}{\partial Y_i} - \sum_{i=1}^n \frac{x_0 y_i}{y_0^2} \frac{\partial}{\partial Y_i} \quad (1.108)$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_0 - x_0 y_i}{y_0^2} \frac{\partial}{\partial Y_i} \quad (1.109)$$

e allora $s = 0$ esattamente quando $\frac{x_i}{x_0} = \frac{y_i}{y_0}$ per ogni $1 \leq i \leq n$, ossia lungo la diagonale di $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$.

Si conclude considerando la risoluzione di Koszul associata ad s (dato che $\bigwedge^p(\mathcal{O}(1) \boxtimes \mathcal{S}(-1)) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n+p) \boxtimes \Omega^p(p)$). \square

Corollario 3 : Se si spezza la risoluzione di Beilinson in sequenze esatte corte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n) \boxtimes \Omega^n(n) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n+1) \boxtimes \Omega^{n-1}(n-1) \rightarrow C_{n-1} \rightarrow 0 \quad (1.110)$$

$$0 \rightarrow C_{n-1} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n+2) \boxtimes \Omega^{n-2}(n-2) \rightarrow C_{n-2} \rightarrow 0$$

\vdots

$$0 \rightarrow C_1 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow \mathcal{O}_{\Delta} \rightarrow 0 \quad (1.111)$$

dal momento che ad ogni sequenza esatta corta si associa un triangolo distinto in $\mathbf{D}_{\text{coh}}^b(\mathbb{P}^n)$, si conclude che \mathcal{O}_{Δ} è generato dalla sequenza di oggetti

$$\{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n) \boxtimes \Omega^n(n), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n+1) \boxtimes \Omega^{n-1}(n-1), \dots, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}\} \quad (1.112)$$

Definizione 1.17 [TRASFORMATA DI FOURIER-MUKAI]: Siano X, Y due varietà, ed $\mathcal{E} \in \mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X \times Y)$. Definiamo la *trasformata di Fourier-Mukai di nucleo* \mathcal{E} come il funtore $\Phi(\mathcal{E}, -): \mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X) \rightarrow \mathbf{D}_{\text{coh}}^b(Y)$ come il funtore che risulta dalla composizione

$$\mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X) \xrightarrow{\pi_X^*} \mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X \times Y) \xrightarrow{-\otimes \mathcal{E}} \mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X \times Y) \xrightarrow{\mathfrak{R}\pi_{Y*}} \mathbf{D}_{\text{coh}}^b(Y) \quad (1.113)$$

(π sono le proiezioni sui fattori). Quando sia necessario precisare quali siano le varietà in gioco, oppure in quale direzione si desidera che il funtore di Fourier-Mukai le leghi, si scrive $\Phi_{X \rightarrow Y}(\mathcal{E}, -)$: questa specifica in effetti spesso è essenziale, ma per questioni di brevità la omettiamo da alcune formule.

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X) & \\ \pi_{X,*} \uparrow & \uparrow \pi_X^* & \\ \mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X \times Y) & & \\ \pi_{Y,*} \downarrow & \downarrow \pi_Y^* & \\ & \mathbf{D}_{\text{coh}}^b(Y) & \end{array}$$

Tutti i funtori usati nella Definizione 1.17 sono esatti, quindi si ottiene un funtore esatto (e in effetti un bifuntore, esatto in ambo le componenti) $(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \mapsto \Phi(\mathcal{E}, \mathcal{F})$: per ogni triangolo distinto $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}[1]$ e ogni $\mathcal{A} \in \mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X)$ in particolare si ottiene un triangolo distinto

$$\Phi(\mathcal{E}, \mathcal{A}) \rightarrow \Phi(\mathcal{F}, \mathcal{A}) \rightarrow \Phi(\mathcal{G}, \mathcal{A}) \rightarrow \Phi(\mathcal{E}, \mathcal{A})[1] \quad (1.114)$$

Da ora in poi pensiamo la trasformata di nucleo $\mathcal{E} \in \mathbf{D}_{\text{coh}}^b(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n)$ come diretta dal secondo \mathbb{P}^n al primo (e non confonderli è essenziale).

Dimostrazione del Teorema 1.4. Usando i triangoli associati alle sequenze esatte corte (1.110)-(1.111) trovate nel Lemma 1.6 otteniamo triangoli distinti

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \Phi(\mathcal{L}_n, \mathcal{A}) & \rightarrow & \Phi(\mathcal{L}_{n-1}, \mathcal{A}) & \rightarrow & \Phi(\mathcal{C}_{n-1}, \mathcal{A}) \rightarrow 0 \\ 0 & \rightarrow & \Phi(\mathcal{C}_{n-1}, \mathcal{A}) & \rightarrow & \Phi(\mathcal{L}_{n-2}, \mathcal{A}) & \rightarrow & \Phi(\mathcal{C}_{n-2}, \mathcal{A}) \rightarrow 0 \\ & & & & \vdots & & \\ 0 & \rightarrow & \Phi(\mathcal{C}_1, \mathcal{A}) & \rightarrow & \Phi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}, \mathcal{A}) & \rightarrow & \Phi(\mathcal{O}_\Delta, \mathcal{A}) \rightarrow 0 \end{array}$$

(dove indichiamo per brevità $\mathcal{L}_p = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-p) \boxtimes \Omega^p(p)$).

Da ciò possiamo concludere che $\Phi(\mathcal{O}_\Delta, \mathcal{A})$ è generato dalla sequenza

$$\{\Phi(\mathcal{L}_n, \mathcal{A}), \Phi(\mathcal{L}_{n-1}, \mathcal{A}), \dots, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}\} \quad (1.115)$$

Usando la formula di proiezione (1.88), è facile notare che per ogni $\mathcal{A} \in D_{\text{coh}}^b(X)$, si ha $\Phi(\mathcal{O}_\Delta, \mathcal{A}) \cong \mathcal{A}$:

$$\Phi(\mathcal{O}_\Delta, \mathcal{A}) = \mathfrak{R}\pi_{X,*}(\mathcal{O}_\Delta \otimes_{\mathcal{O}_X} \pi_Y^* \mathcal{A}) \quad (1.116)$$

$$= (\mathfrak{R}\pi_{X,*} \mathcal{O}_\Delta) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A} \quad (1.117)$$

$$\cong \mathcal{A} \quad (1.118)$$

dove in (1.117) si è usata la formula di proiezione, e (1.118) vale perché

$$\Gamma(U, \pi_{X,*} \mathcal{O}_\Delta) = \Gamma(\pi_X^{\leftarrow} U, \mathcal{O}_\Delta) = \Gamma((U \times \mathbb{P}^n) \cap \Delta, \mathcal{O}_\Delta). \quad (1.119)$$

Ora, per concludere che la sequenza $\{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n), \dots, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}\}$ genera $\mathbf{D}_{\text{coh}}^b(\mathbb{P}^n)$ è sufficiente provare che per ogni \mathcal{A} , $\Phi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-p) \boxtimes \Omega^p(p), \mathcal{A})$ sta nella sottocategoria triangolata generata da $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-p)$. Usando ancora la formula di proiezione, se

$\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-p) \boxtimes \Omega^p(p)$ si ha (tutti i funtori si intendono derivati, ma eliminiamo le $\mathfrak{R}, \mathfrak{F}$ per brevità)

$$\Phi(\mathcal{E}, \mathcal{A}) = \pi_{X,*}(\pi_X^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-p) \otimes \pi_Y^* \Omega^p(p) \otimes \pi_Y^* \mathcal{A}) \quad (1.120)$$

$$= \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-p) \otimes \pi_{X,*}(\pi_Y^*(\Omega^p(p) \otimes \mathcal{A})) \quad (1.121)$$

$$= \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-p) \otimes \Gamma(\mathbb{P}^n, \Omega^p(p) \otimes \mathcal{A}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \quad (1.122)$$

$$= \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-p) \otimes \Gamma(\mathbb{P}^n, \Omega^p(p) \otimes \mathcal{A}), \quad (1.123)$$

dove (1.122) vale perché per ogni $U \subseteq X$

$$\Gamma(U, \pi_{X,*}(\pi_Y^* \mathcal{F})) = \Gamma(U \times Y, \pi_Y^* \mathcal{F}) = \Gamma(Y, \mathcal{F}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X. \quad (1.124)$$

Da questo si deduce che $\Phi(\mathcal{E}, \mathcal{A})$ è isomorfo a un complesso che ha differenziali tutti nulli, e che, indicando con $h_k = \dim \mathfrak{R}^k \Gamma(\mathbb{P}^n, \Omega^p(p) \otimes \mathcal{A}) = \dim H^k(\mathfrak{R} \Gamma(\mathbb{P}^n, \Omega^p(p) \otimes \mathcal{A}))$, in posizione k è fatto da h_k copie di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-p)$. Questo complesso è ovviamente generato dagli $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-p)$, perché è una somma diretta finita, riguardata come cono mappante sul morfismo zero, di shift di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-p)$.

Ogni oggetto di $\mathbf{D}_{\text{coh}}^b(\mathbb{P}^n)$ si ottiene dunque prendendo al più n coni mappanti su oggetti che sono del tipo $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-p)[j]$, con $-n \leq p \leq 0$ e $j \in \mathbb{Z}$. \square

Osservazione 1.17 : Questo paragrafo riprende un risultato di [Bei], di ardua comprensione senza l'aiuto di [Cal] (che viene seguito praticamente alla lettera); il risultato originale è stato grandemente ripreso ed esteso anche in altre fonti: per esempio in [Oko] viene riportato nella forma

Teorema 1.5 : Sia \mathcal{F} un fascio coerente su \mathbb{P}^n . Allora esistono due sequenze spettrali³

$$E_1^{r,s} = H^s(\mathcal{F}(r)) \otimes \Omega^{-r}(-r) \implies E_\infty^{r,s} = \begin{cases} \mathcal{F} & r+s=0 \\ 0 & r+s \neq 0, \end{cases} \quad (1.125)$$

$$E_1^{r,s} = H^s(\mathcal{F} \otimes \Omega^{-r}(-r)) \otimes \mathcal{O}(r) \implies E_\infty^{r,s} = \begin{cases} \mathcal{F} & r+s=0 \\ 0 & r+s \neq 0. \end{cases} \quad (1.126)$$

Si osservi che il fatto che $\Omega^{-r}(-r)$ sia il fascio nullo se $r \notin [-n, \dots, 0]$ implica che le due sequenze spettrali sono concentrate nel quadrato $[-n, \dots, 0] \times [0, \dots, n]$.

La dimostrazione usa principalmente la risoluzione di fasci localmente liberi trovata nel Lemma 1.6.

Osservazione 1.18 : Per concludere, studiamo qualche altra proprietà dei funtori di Fourier-Mukai; abbiamo già sfruttato la proprietà per cui $\Phi_{X \rightarrow Y}(\mathcal{O}_\Delta, -) \cong \text{id}$;

³Per le notazioni si rimanda all'Appendice B.

questo è una conseguenza generale del fatto che il funtore di shift $\mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X) \rightarrow \mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X)$ (che è addirittura un'autoequivalenza di categorie) è naturalmente isomorfo al funtore di Mukai di nucleo $\mathcal{O}_\Delta[1]$, dove $\Delta \subset X \times X$ è la sottovarietà diagonale.

Si è anche già accennato al fatto che la corrispondenza $\mathcal{E} \mapsto \Phi_{X \rightarrow Y}(\mathcal{E}, -)$ è essa stessa un funtore, tra le categorie $\mathbf{D}_{\text{coh}}(X)$ e $\text{Fun}(\mathbf{D}_{\text{coh}}(X), \mathbf{D}_{\text{coh}}(Y))$: addirittura, l'immagine di questo funtore è una sottocategoria, dato che la composizione di funtori di Mukai è a sua volta un funtore di Mukai: in particolare date tre varietà X, Y, Z si ha una equivalenza naturale canonica tra i funtori $\Phi_{X \rightarrow Z}(\mathcal{F} \star \mathcal{E}, -)$ e $\Phi_{Y \rightarrow Z}(\mathcal{F}, -) \circ \Phi_{X \rightarrow Y}(\mathcal{E}, -)$, in cui abbiamo definito

$$\mathcal{F} \star \mathcal{E} := \mathfrak{R}\pi_{XZ,*}(\pi_{XY}^* \mathcal{E} \otimes \pi_{YZ}^* \mathcal{F}) \quad (1.127)$$

dove $\pi_{XY}: X \times Y \times Z \rightarrow X \times Y$ è una proiezione, e analogamente sono definite tutte le altre.

La dimostrazione di questo ultimo asserto si ottiene per puro *abstract-nonsense*, sfruttando la formula di proiezione **1.88** e il seguente cambio di base piatto: vi sono gli isomorfismi naturali (tutti i funtori si intendono derivati, ma eliminiamo le $\mathfrak{R}, \mathfrak{L}$ per brevità)

$$\begin{aligned} \Phi_{Y \rightarrow Z}(\mathcal{E}, \Phi_{X \rightarrow Y}(\mathcal{F}, -)) &\cong \pi_{Z,*}(\mathcal{E} \otimes \pi_Y^*(\pi_{Y,*}(\mathcal{F} \otimes \pi_X^*(-)))) \\ &\cong \pi_{Z,*}(\mathcal{E} \otimes \pi_{YZ,*}(\pi_{XY}^*(\mathcal{F} \otimes \pi_X^*(-)))) \\ &\cong \pi_{Z,*} \pi_{YZ,*}(\pi_{YZ}^* \mathcal{E} \otimes \pi_{XY}^* \mathcal{F} \otimes \pi_X^*(-)) \\ &\cong \pi_{Z,*} \pi_{XZ,*}(\pi_{YZ}^* \mathcal{E} \otimes \pi_{XY}^* \mathcal{F} \otimes \pi_X^* \pi_X^*(-)) \\ &\cong \pi_{Z,*}((\mathcal{F} \star \mathcal{E}) \otimes \pi_X^*(-)) \end{aligned}$$

Da ultimo, sotto ipotesi di finitezza per \mathcal{E} , il funtore $\Phi_{X \rightarrow Y}(\mathcal{E}, -)$ ha sia un aggiunto sinistro che un aggiunto destro, dati rispettivamente da $\Phi_{Y \rightarrow X}(\mathcal{E}^\vee \otimes \omega_Y[\dim Y], -)$ e $\Phi_{Y \rightarrow X}(\mathcal{E}^\vee \otimes \omega_X[\dim X], -)$.

Precisamente, \mathcal{E} deve essere di dimensione omologica finita: a questa ipotesi il complesso duale $\mathcal{E}^\vee := \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$ ha anch'esso dimensione omologica finita, e per ogni $\mathcal{A} \in \mathbf{D}^+(X)$ si hanno gli isomorfismi canonici

$$\mathcal{E} \cong \mathcal{E}^{\vee\vee} \quad (1.128)$$

$$\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{A} \cong \mathfrak{R}\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{A}) \quad (1.129)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}\mathcal{H}om(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \otimes \mathcal{E} &\cong \mathfrak{R}\mathcal{H}om(\mathcal{A}, \mathcal{B} \otimes \mathcal{E}) \\ &\cong \mathfrak{R}\mathcal{H}om(\mathcal{A} \otimes \mathcal{E}^\vee, \mathcal{B}) \end{aligned} \quad (1.130)$$

analoghi -al netto del considerare complessi in categorie derivate- a quelli che sussistono tra spazi vettoriali di dimensione finita.

La tesi a questo punto segue da **1.130**, dal fatto che $- \overset{\mathcal{L}}{\otimes} \mathcal{E}^\vee$ è aggiunto sia destro che sinistro di $- \overset{\mathcal{L}}{\otimes} \mathcal{E}$ e dal fatto che l'aggiunto destro/sinistro di un funtore che risulta dalla composizione di funtori che ammettono un aggiunto destro/sinistro risulta dalla composizione in senso inverso di tali aggiunti:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}\pi_{Y,*} \circ ((-) \overset{\mathcal{L}}{\otimes} \mathcal{E}) \circ ((-) \otimes \pi_Y \omega_Y[\dim Y]) \circ \pi_X^* = \\ = \Phi_{Y \rightarrow X}(\mathcal{E}^\vee \otimes \omega_Y[\dim Y], -) \dashv \Phi_{X \rightarrow Y}(\mathcal{E}, -). \end{aligned} \quad (1.131)$$

Capitolo 2

CATEGORIE DI FASCI

...L'essentiel c'est cette transition entre quelque chose qu'etais écrite, qui parait incompréhensible, et les images mentales que l'on crée.

A. Connes

IL CAPITOLO comincia richiamando il necessario dalla teoria classica dei fasci e della loro coomologia, sia come prerequisito essenziale per la discussione del teorema di ricostruzione di Orlov (a cui è dedicata per intero la sezione 2.4), sia come applicazione del macchinario descritto in completa generalità nel capitolo precedente: quanto segue è prerequisito essenziale anche per apprezzare la sezione 1.3, che è stata presentata come applicazione “immediata” e suggestiva del formalismo delle categorie derivate. Seguiamo praticamente sempre il capitolo 2 di [Sch1].

Nel seguito $f: X \rightarrow Y$ è una funzione continua tra spazi topologici (o una funzione regolare tra i tipi di spazi considerati: varietà topologiche o algebriche, schemi...).

2.1 Richiami generali.

2.1.1 Immagini Dirette e Inverse.

Definizione 2.1 [FASCIO IMMAGINE DIRETTA]: Sia $\mathcal{G} \in \text{Sh}(X)$. Definiamo il fascio $f_*\mathcal{G}$ su Y come $U \mapsto \mathcal{G}(f^*U)$, e se $\varphi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ è un morfismo di fasci su

X , $f_*\varphi: f_*\mathcal{G} \rightarrow f_*\mathcal{G}'$ tra fasci su Y è definito da $\varphi * f^\leftarrow$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(f^\leftarrow U) & \xrightarrow{\varphi_{f^\leftarrow U}} & \mathcal{G}'(f^\leftarrow U) \\ \text{res} \downarrow & & \downarrow \text{res} \\ \mathcal{G}(f^\leftarrow V) & \xrightarrow{\varphi_{f^\leftarrow V}} & \mathcal{G}'(f^\leftarrow V) \end{array} \quad (2.1)$$

Definizione 2.2 [FASCIO IMMAGINE INVERSA]: Sia $\mathcal{F} \in \text{Sh}(Y)$, definisco $f^{-1}\mathcal{F}$ come il fascio su X associato al prefascio

$$V \mapsto \varinjlim_{U \supseteq fV} \mathcal{F}(U) \quad (2.2)$$

Le restrizioni si determinano grazie al fatto che (detto $\mathcal{J}(V)$ l'insieme degli intorni di $f(V)$ in Y) si ha $W \subseteq V \Rightarrow \mathcal{J}(fV) \subseteq \mathcal{J}(fW)$; allora esiste $\varinjlim_{U \in \mathcal{J}(V)} \mathcal{F}(U) \rightarrow \varinjlim_{U \in \mathcal{J}(W)} \mathcal{F}(U)$.

Su un morfismo di fasci $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ si ha la mappa indotta tra fasci su X

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim_{U \supseteq fV} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varinjlim_{U \supseteq fV} \varphi_U} & \varinjlim_{U \supseteq fV} \mathcal{F}'(U) \\ \text{res} \downarrow & & \downarrow \text{res} \\ \varinjlim_{U \supseteq fW} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varinjlim_{U \supseteq fW} \varphi_U} & \varinjlim_{U \supseteq fW} \mathcal{F}'(U) \end{array} \quad (2.3)$$

Osservazione 2.1: Se \mathcal{R} è un fascio di anelli su X , $f^{-1}\mathcal{R} \in \text{Sh}(Y)$. Se \mathcal{S} è un fascio di anelli su Y , $f_*\mathcal{S} \in \text{Sh}(X)$. Queste due corrispondenze inducono funtori

$$\begin{aligned} f_*: \text{Mod}(\mathcal{S}) &\rightarrow \text{Mod}(f_*\mathcal{S}) \\ f^{-1}: \text{Mod}(\mathcal{R}) &\rightarrow \text{Mod}(f^{-1}\mathcal{R}) \end{aligned}$$

Osservazione 2.2: I funtori $f^{-1}: \text{Sh}(Y) \rightleftarrows \text{Sh}(X): f_*$ sono mutualmente aggiunti in modo che $f^{-1} \dashv f_*$: counità e unità di questa aggiunta sono rispettivamente la trasformazione naturale

$$f^{-1} \circ f_* \rightarrow 1 \quad (2.4)$$

indotta dal fatto che $(f^{-1} \circ f_*\mathcal{G})(V) = \varinjlim_{W \supseteq fV} \mathcal{G}(f^\leftarrow W)$, e che se $W \supseteq fV$, allora $f^\leftarrow W \supseteq V$ (come segue immediatamente dalla catena di inclusioni $f^\leftarrow W \supseteq f^\leftarrow fV \supseteq V$); da questo segue che per ogni $W \supseteq fV$ esiste $\mathcal{G}(f^\leftarrow W) \rightarrow \mathcal{G}(V)$, e dunque una freccia $(f^{-1} \circ f_*\mathcal{G})(V) = \varinjlim_{W \supseteq fV} \mathcal{G}(f^\leftarrow W) \rightarrow \mathcal{G}(V)$, e la trasformazione

$$1 \rightarrow f_* \circ f^{-1} \quad (2.5)$$

2.1. RICHIAMI GENERALI.

indotta dal fatto che $(f_* \circ f^{-1}\mathcal{F})(U) = \varinjlim_{W \supseteq f(f^{-1}U)} \mathcal{F}(W)$, e che dunque U è uno degli aperti che contengono $f(f^{-1}U)$: esiste perciò una mappa $\mathcal{F}(U) \rightarrow (f_* \circ f^{-1}\mathcal{F})(U) = \varinjlim_{W \supseteq f(f^{-1}U)} \mathcal{F}(W)$.

Osservazione 2.3 : Lavorando in categorie di fasci di \mathcal{O}_X -moduli è in effetti più appropriato sostituire il funtore $f^{-1}: \mathcal{G} \mapsto f^{-1}\mathcal{G}$ con un altro, da indicarsi $f^*: \mathcal{G} \mapsto f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$ (ma raramente c'è pericolo di confusione, e spesso dunque si indica con lo stesso nome). In generale infatti f^{-1} non restituisce direttamente fasci di \mathcal{O}_X -moduli: per ottenerne uno è necessario “estendere gli scalari” tensorizzando su $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ con il fascio \mathcal{O}_X .

La categoria dei prefasci sullo spazio X è notoriamente riflessiva nella categoria dei fasci, e il riflettore $(-)^a \dashv \iota: \text{PSh}(X) \hookrightarrow \text{Sh}(X)$ (indicato anche con $(-)^a$, ma abbiamo riservato questo simbolo ad altre costruzioni) è detto *funtore di fascificazione*; da questo si deduce immediatamente che tutti i limiti sono rispettati nel passaggio $\text{PSh}(X) \hookrightarrow \text{Sh}(X)$. I colimiti, ed altri tipi di funtori, possono comportarsi peggio (per esempio i conuclei vanno molto spesso fascificati): un esempio di grande utilità è il prodotto tensore di fasci, che solitamente è solo un prefascio.

Definizione 2.3 : Dato un fascio di anelli \mathcal{R} , e due fasci \mathcal{F}, \mathcal{G} di \mathcal{R} -moduli, definiamo il fascio *prodotto tensoriale* $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ come il fascificato del prefascio $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{G}(U)$.

Direttamente dalla definizione, e dal fatto che sia $- \otimes -$ sia il funtore di fascificazione sono esatti a destra, si deduce che

$$(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{G})_x \cong \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{R}_x} \mathcal{G}_x \quad (2.6)$$

Proposizione 2.1 : C'è un isomorfismo

$$f^{-1}\mathcal{F} \otimes_{f^{-1}\mathcal{R}} f^{-1}\mathcal{G} \cong f^{-1}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{G}) \quad (2.7)$$

Dimostrazione. Basta trovare un morfismo tra i fasci che induca un isomorfismo su ogni spiga: questo morfismo è esattamente la freccia naturale

$$\mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{G}(U) \longrightarrow (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{G})(U) \quad (2.8)$$

indotta dall'unità dell'aggiunzione che rende $\text{Sh}(X)$ una sottocategoria riflessiva di $\text{PSh}(X)$.

Sulle spighe si ha, per ogni $x \in X$

$$\begin{aligned} \left(f^{-1}\mathcal{F} \otimes_{f^{-1}\mathcal{R}} f^{-1}\mathcal{G} \right)_x &\cong (f^{-1}\mathcal{F})_x \otimes_{(f^{-1}\mathcal{R})_x} (f^{-1}\mathcal{G})_x \\ &\cong \mathcal{F}_{f(x)} \otimes_{\mathcal{R}_{f(x)}} \mathcal{G}_{f(x)} \\ &\cong (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{G})_{f(x)}. \end{aligned} \quad \square$$

2.1.2 Fasci su insiemi localmente chiusi.

Se dotiamo $Z \subset X$ della topologia di sottospazio, e indichiamo con $j_Z: Z \hookrightarrow X$ l'inclusione insiemistica, per ogni $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X)$ resta definito un fascio su Z , indicato con $\mathcal{F}_Z := j_Z^{-1}\mathcal{F}$.

Osservazione 2.4 : Esiste una freccia naturale $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_Z$ (precisamente la freccia canonica verso il limite, $\mathcal{F}(X) \rightarrow \varinjlim_{W \supseteq Z} \mathcal{F}(W)$: X è uno di tali intorni. Il significato di questa operazione è la restrizione delle sezioni globali di \mathcal{F} a Z .

Osservazione 2.5 : Se assumiamo che Z sia chiuso in X , e poniamo $\mathcal{F}_Z := j_{Z,*}j_Z^{-1}\mathcal{F}$, l'unità dell'aggiunzione $j_Z^{-1} \dashv j_{Z,*}$ induce una freccia $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_Z$. In più si osservi che

$$\begin{cases} \mathcal{F}_Z|_Z = \mathcal{F}|_Z \\ \mathcal{F}_Z|_{X \setminus Z} = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

(la prima identità segue dall'unità della stessa aggiunzione, la seconda dal fatto che per ogni $x \in X \setminus Z$, che è aperto, esiste U tale che $x \in U \subseteq X \setminus Z$; allora $\Gamma(U, \mathcal{F}_Z|_{X \setminus Z}) = \Gamma(U, j_*j^{-1}\mathcal{F}) = \Gamma(j^{\leftarrow}U, j^{-1}\mathcal{F}) = \Gamma(\emptyset, j^{-1}\mathcal{F}) = (0)$. Da questo segue che $(\mathcal{F}_Z|_{X \setminus Z})_x = (0)$ per ogni $x \notin Z$, dunque $\mathcal{F}_Z|_{X \setminus Z}$ è il fascio nullo).

In particolare,

$$(\mathcal{F}_Z)_x = \begin{cases} \mathcal{F}_x & x \in Z \\ 0 & x \notin Z \end{cases} \quad (2.10)$$

Osservazione 2.6 : Se assumiamo che Z sia localmente chiuso (ossia se $Z = A \cap C$ con A aperto e C chiuso in X), esiste un altro modo di associare a \mathcal{F} un fascio che soddisfa (2.10): si pone $\mathcal{F}_Z := (\mathcal{F}_A)_C$, e questo è indipendente dagli A, C scelti.

Relativamente alla condizione (2.10) vale un criterio di unicità: ogni altro fascio che la soddisfa è isomorfo a \mathcal{F}_Z . Raccogliamo questo ed altri risultati in un'unico enunciato:

Proposizione 2.2 : Se Z è localmente chiuso in X , ed $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X)$, allora

- \mathcal{F}_Z soddisfa a (2.10), e ogni altro fascio che la soddisfa è isomorfo a \mathcal{F}_Z ;
- $(-)_Z: \text{Sh}(X) \rightarrow \text{Sh}(Z)$ è un funtore esatto;
- Se Z' è un altro insieme localmente chiuso, $(\mathcal{F}_Z)_{Z'} \cong (\mathcal{F}_{Z'})_Z \cong \mathcal{F}_{Z \cap Z'}$ (l'intersezione di un numero finito di localmente chiusi è ovviamente localmente chiusa);

Dimostrazione. Vedi [Sch1], pag. 94. □

2.1. RICHIAMI GENERALI.

Proposizione 2.3: Se $Z \subseteq X$ è localmente chiuso, ed \mathcal{F} è un fascio di \mathcal{R} -moduli, ci sono morfismi (eventualmente isomorfismi)

$$\mathcal{R}_Z \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{F} \cong \mathcal{F}_Z \quad (2.11)$$

$$(\mathcal{F}_1 \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{F}_2)_Z \cong \mathcal{F}_1 \otimes_{\mathcal{R}} (\mathcal{F}_2)_Z \cong (\mathcal{F}_1)_Z \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{F}_2 \quad (2.12)$$

$$f^{-1}(\mathcal{F}_Z) \cong (f^{-1}\mathcal{F})_{f^{-1}(Z)} \quad (2.13)$$

$$f_*\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{F} \rightarrow f_*(\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{R}} f^{-1}\mathcal{F}) \quad (2.14)$$

$f: Y \rightarrow X$ essendo una funzione continua.

Dimostrazione. Grazie al punto 1 della Proposizione 2.2 basta mostrare che su ogni spiga i due fasci soddisfano le stesse condizioni (2.10). Usando anche la Proposizione 2.1 si ha

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}_Z \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{F})|_Z &\cong j_Z^{-1}(\mathcal{R}_Z \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{F}) \\ &\cong j_Z^{-1}\mathcal{R}_Z \otimes_{\mathcal{R}|_Z} j_Z^{-1}\mathcal{F} \\ &\cong \mathcal{R}|_Z \otimes_{\mathcal{R}|_Z} \mathcal{F}|_Z \\ &\cong \mathcal{F}|_Z \\ (\mathcal{R}_Z \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{F})|_{X \setminus Z} &\cong j_{X \setminus Z}^{-1}\mathcal{R}_Z \otimes_{\mathcal{R}|_Z} \mathcal{F}|_{X \setminus Z} \\ &\cong 0 \end{aligned}$$

Anche per dimostrare i rimanenti asserti si invoca il primo punto della Proposizione (2.2): innanzitutto, esiste una freccia

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 \otimes_{\mathcal{R}} j_{Z,*} j_Z^{-1} \mathcal{F}_2 &\cong j_{Z,*} j_Z^{-1} \mathcal{F}_2 \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{F}_1 \rightarrow j_{Z,*} (j_Z^{-1} \mathcal{F}_2 \otimes_{\mathcal{R}|_Z} j_Z^{-1} \mathcal{F}_1) \cong \\ &\cong j_{Z,*} (j_Z^{-1} \mathcal{F}_1 \otimes_{\mathcal{R}|_Z} j_Z^{-1} \mathcal{F}_2) \cong j_{Z,*} j_Z^{-1} (\mathcal{F}_1 \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{F}_2) = (\mathcal{F}_1 \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{F}_2)_Z \end{aligned}$$

Sulle spighe ora si ha che

$$(\mathcal{F}_1 \otimes_{\mathcal{R}} (\mathcal{F}_2)_Z)_x = \begin{cases} x \in Z & \mathcal{F}_{1,x} \otimes \mathcal{F}_{2,x} \cong (\mathcal{F}_1 \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{F}_2)_{Z,x} \\ x \notin Z & \mathcal{F}_{1,x} \otimes 0 = 0 \cong (\mathcal{F}_1 \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{F}_2)_{Z,x} \end{cases} \quad (2.15)$$

e analogamente per $(\mathcal{F}_2 \otimes_{\mathcal{R}} (\mathcal{F}_1)_Z)_x$.

Per dimostrare (2.13) si osservi che una freccia $f^{-1}(\mathcal{F}_Z) \rightarrow (f^{-1}\mathcal{F})_{f^{-1}(Z)}$ esiste applicando f^{-1} a $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_Z$ e poi prendendo la freccia naturale verso $(f^{-1}\mathcal{F})_{f^{-1}(Z)}$; sulle spighe

$$(f^{-1}\mathcal{F})_{f^{-1}(Z),x} = \begin{cases} (f^{-1}\mathcal{F})_x & x \in f^{-1}(Z) (\iff f(x) \in Z) \\ 0 & x \notin f^{-1}(Z) (\iff f(x) \notin Z) \end{cases} \quad (2.16)$$

Queste spighe coincidono con $\mathcal{F}_{Z, f(x)}$, e dunque si conclude.

Per dimostrare (2.14) si usa la sequenza di isomorfismi

$$\begin{aligned} \text{hom}(\mathcal{G} \otimes f^{-1}\mathcal{F}, \mathcal{G} \otimes f^{-1}\mathcal{F}) &\rightarrow \text{hom}(f^{-1}f_*(\mathcal{G}) \otimes f^{-1}\mathcal{F}, \mathcal{G} \otimes f^{-1}\mathcal{F}) \\ &\cong \text{hom}(f^{-1}(f_*\mathcal{G} \otimes \mathcal{F}), \mathcal{G} \otimes f^{-1}\mathcal{F}) \\ &\cong \text{hom}(f_*\mathcal{G} \otimes \mathcal{F}, f_*(\mathcal{G} \otimes f^{-1}\mathcal{F})) \end{aligned}$$

L'immagine di $\text{id}_{\mathcal{G} \otimes f^{-1}\mathcal{F}}$ mediante questa corrispondenza è la freccia cercata (in generale non è un isomorfismo: condizione sufficiente è che \mathcal{F} sia un fascio di \mathcal{B} -moduli piatti). \square

2.1.3 Prodotto tensore Esterno.

Definizione 2.4 : Siano S, X, X' spazi topologici, e $X \xrightarrow{p} S \xleftarrow{p'} X'$ un diagramma di funzioni continue. Denotiamo con $X \times_S X'$ il pullback di X, X' su S , mediante le mappe p, p' , e con q, q' le proiezioni canoniche nel diagramma cartesiano a fianco. Se \mathcal{F}, \mathcal{G} sono fasci su X, X' , definiamo il fascio

$$\begin{array}{ccccc} X \times_S X' & & X & & \\ q' \downarrow & \searrow \pi & & \downarrow p & \\ X' & & S & & \\ & & p' \nearrow & & \end{array}$$

$$\mathcal{F} \boxtimes_{\mathcal{B}} \mathcal{G} := q^{-1}\mathcal{F} \otimes (q')^{-1}\mathcal{G} \in \text{Sh}(X \times X') \quad (2.17)$$

Osservazione 2.7 : Se $S = \{pt\}$ è l'insieme con un solo elemento, $X \times_S X' \cong X \times X'$. Se in più $X = X'$, si noti che

$$\delta^{-1}(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}) \cong \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \quad (2.18)$$

$\delta: X \rightarrow X \times X$ essendo la mappa diagonale.

2.2 Coomologia.

Being intended for graduate and research work, not a single attempt is made here to use only elementary ideas.

R. Stong

Tutti i risultati del capitolo precedente (in particolare quelli della sezione 1.2.3) si possono applicare alla categoria $\text{Sh}(X)$ dei fasci di gruppi abeliani (o moduli su un anello) sullo spazio X ; in particolare, è un risultato classico che $\text{Sh}(X)$ abbia sempre abbastanza iniettivi, dunque tutti i funtori esatti a sinistra possono essere derivati per diventare funtori tra le categorie derivate (scriviamo per brevità

$\mathbf{D}^\bullet(X) = \mathbf{D}^\bullet(\mathrm{Sh}(X))$ e $\mathbf{D}(\mathcal{R}) = \mathbf{D}^\bullet(\mathrm{Mod}_{\mathcal{R}})$, dove $\bullet \in \{+, -, b\}$:

$$\mathfrak{R}\Gamma(X, -): \mathbf{D}^+(\mathcal{R}) \rightarrow \mathbf{D}^+(\mathbf{Ab}) \quad (2.19)$$

$$\mathfrak{R}f_*: \mathbf{D}^+(f^{-1}\mathcal{R}) \rightarrow \mathbf{D}^+(\mathcal{R}) \quad (2.20)$$

$$\mathfrak{R}\mathcal{H}om(-, -): \mathbf{D}^-(\mathcal{R})^{\mathrm{op}} \times \mathbf{D}^+(\mathcal{R}) \rightarrow \mathbf{D}^+(\mathcal{R}) \quad (2.21)$$

$$\mathfrak{R}f_!: \mathbf{D}^+(f^{-1}\mathcal{R}) \rightarrow \mathbf{D}^+(\mathcal{R}) \quad (2.22)$$

e tutti i funtori esatti si trasportano immutati

$$(-)_Z: \mathbf{D}^\bullet(\mathcal{R}) \rightarrow \mathbf{D}^\bullet(\mathcal{R}) \quad (2.23)$$

$$f^{-1}: \mathbf{D}^\bullet(\mathcal{R}) \rightarrow \mathbf{D}^\bullet(f^{-1}\mathcal{R}) \quad (2.24)$$

I funtori esatti a destra, come per esempio il prodotto tensore, possono essere derivati grazie al fatto che la famiglia dei fasci \mathcal{R} -piatti è generante in $\mathrm{Mod}_{\mathcal{R}}$, dunque ogni $\mathcal{F} \in \mathbf{D}^\bullet(\mathcal{R})$, con $\bullet \in \{+, b\}$, è quasi-isomorfo ad un complesso limitato o positivo di fasci di \mathcal{R} -moduli piatti. Definiamo il derivato sinistro di $\otimes_{\mathcal{R}}$ come

$$-\overset{\mathfrak{L}}{\otimes}_{\mathcal{R}}-: \mathbf{D}^\bullet(\mathcal{R}) \times \mathbf{D}^\bullet(\mathcal{R}) \rightarrow \mathbf{D}^\bullet(\mathcal{R}) \quad (2.25)$$

e, ricordando la definizione 2.4, il derivato sinistro di $\boxtimes_{\mathcal{R}}$ su S come

$$-\overset{\mathfrak{L}}{\boxtimes}-: \mathbf{D}^\bullet(p^{-1}\mathcal{R}) \times \mathbf{D}^\bullet(p'^{-1}\mathcal{R}) \rightarrow \mathbf{D}^\bullet(\pi^{-1}\mathcal{R}). \quad (2.26)$$

Anche aver inquadrato la questione del misurare l'ostruzione all'esattezza di un funtore nello scenario molto generale delle categorie derivate non risolve il problema dal punto di vista computazionale: in quest'ottica è ancora indispensabile poter calcolare una risoluzione iniettiva del fascio \mathcal{F} di cui si vuole calcolare l'immagine mediante \mathfrak{RH} (con \mathcal{H} un funtore esatto a sinistra del tipo dei (2.19)–(2.22)).

In virtù del risultato seguente, è “difficile” costruire risoluzioni iniettive, dato che la classe $\mathrm{Inj}(\mathrm{Sh}(X))$, ancorché cogenerante, è minimale tra opportune classi siffatte in tale categoria.

Lemma 2.1 : Sia \mathbf{C} una categoria abeliana e \mathbf{J} una qualsiasi famiglia cogenerante di oggetti di \mathbf{C} chiusa per addendi diretti (ossia tale che se $J \in \mathbf{J}$, ogni $K \leq_{\oplus} J$ sta in \mathbf{J}). Allora ogni oggetto iniettivo di \mathbf{C} è anche un oggetto di \mathbf{J} .

Dimostrazione. Sia E un iniettivo di \mathbf{C} . Si immerga E in un oggetto di \mathbf{J} ; la sequenza

$$0 \rightarrow E \rightarrow J \rightarrow J/E \rightarrow 0 \quad (2.27)$$

è esatta. Per iniettività però questa spezza, dunque $E \leq_{\oplus} J$. \square

Fortunatamente, i fasci iniettivi non sono l'unica classe cogenerante di $\mathrm{Sh}(X)$ ad essere anche aciclica (ossia tale che $H^k(\mathcal{F}) = 0$ per ogni $k \geq 1$).

2.2.1 Classi di Fasci Aciclici.

Fasci fiacchi.

Proposizione 2.4 : Il funtore delle sezioni globali $\Gamma(X, -): \text{Sh}(X) \rightarrow \mathbf{Ab}$: $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(X)$ è esatto a sinistra. Non è in generale esatto a destra.

Dimostrazione. Il funtore $\Gamma(U, -)$ risulta dalla composizione

$$(-)U \circ \iota: \text{Sh}(X) \hookrightarrow \text{PSh}(X) \rightarrow \mathbf{Ab} \quad (2.28)$$

dove il funtore $(-)U: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}(U)$ manda un prefascio su X nel gruppo delle sue sezioni su U . Il funtore $\iota: \text{Sh}(X) \hookrightarrow \text{PSh}(X)$ è esatto a sinistra, perché fa parte di una coppia aggiunta in cui è aggiunto destro (per la precisione il suo aggiunto destro è il funtore di fascificazione). Il funtore $(-)U$ è esatto perché limiti e colimiti si calcolano puntualmente in $\text{PSh}(X)$: in particolare nella sequenza

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0 \quad (2.29)$$

si ha che $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è mono ($\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ è epi) se e solo se $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ è mono ($\mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{H}(U)$ è epi) per ogni $U \subseteq X$ aperto, e analogamente $\ker(\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}) \cong \text{im}(\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G})$ se e solo se ciò avviene in ogni componente.

È evidente che la composizione di funtori esatti da uno stesso lato è esatta da quel lato, e dunque la tesi segue.

Per un controesempio all'esattezza di $\Gamma(U, -)$ a destra, si consideri per $X = \mathbb{C}$ la sequenza

$$0 \rightarrow \mathbb{C}_X \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0 \quad (2.30)$$

dove \mathbb{C}_X è il fascio delle funzioni di variabile complessa localmente costanti, $\mathbb{C}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$ l'immersione nel fascio delle olomorfe, e $\partial: \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$ la derivazione complessa. Se $U = \mathbb{C}^\times$ la sequenza immagine via $\Gamma(U, -)$ non è esatta a destra (è il classico esempio della forma angolo nel piano bucato, che è chiusa ma non esatta). \square

Il funtore delle sezioni globali deriva spesso in dipendenza dalle caratteristiche topologiche dello spazio X ; definiamo la *coomologia dei fasci su X* come la famiglia dei funtori derivati destri del funtore delle sezioni globali:

$$H^k(\mathcal{F}) := (\mathfrak{R}^k \Gamma(X, -))(\mathcal{F}) = H^k(\Gamma(X, \mathcal{E}^\bullet)) \quad (2.31)$$

$\mathcal{E}^\bullet = 0 \rightarrow \mathcal{E}^0 \rightarrow \mathcal{E}^1 \rightarrow \dots$ essendo una risoluzione iniettiva di \mathcal{F} .

Definizione 2.5 : Sia X uno spazio topologico, $\mathcal{C}(X)$ l'insieme dei suoi chiusi. Un sottoinsieme $\Phi \subset \mathcal{C}(X)$ si dice *famiglia di supporti* su X se

- È chiuso per inclusione di sottospazi chiusi: se $A \in \Phi$ e $B \subseteq A$ è chiuso, $B \in \Phi$;

2.2. COOMOLOGIA.

- È chiuso per unioni finite: se $A, A' \in \Phi$ allora $A \cup A' \in \Phi$.

Definizione 2.6 : Data una famiglia Φ di supporti su X , definiamo il sottofunore di $\Gamma(X, -)$ come

$$\Gamma_{\Phi}(X, \mathcal{F}) := \left\{ s \in \Gamma(X, \mathcal{F}) \mid \text{cl}\{x \in X \mid s_x \neq 0\} \in \Phi \right\} \quad (2.32)$$

I funtori derivati destri del funtore $\Gamma_{\Phi}(X, -)$ definiscono la *coomologia a supporto* Φ dei fasci su X .

Esempio 4. Se X è uno spazio topologico, la collezione di tutti i suoi chiusi è banalmente una famiglia di supporti.

Esempio 5. Se X è uno spazio topologico di Hausdorff, la collezione di tutti i compatti di X è una famiglia di supporti: la coomologia dei fasci che si ottiene è la coomologia a supporto compatto; si pensi al caso di una varietà liscia, e al complesso di de Rham del suo fascio delle forme differenziali.

Definizione 2.7 : Sia X uno spazio topologico, ed \mathcal{F} un fascio su X . Esso si dice *fiacco* se, per ogni $U \subseteq X$ aperto, la restrizione $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ è un epimorfismo. Questo significa che ogni sezione locale “proviene” per restrizione da una sezione globale.

Osservazione 2.8 : Si osservi che dalle proprietà di prefascio si deduce che le restrizioni $\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ sono epimorfismi anche per ogni coppia di aperti $U \subseteq V$.

Osservazione 2.9 [CRITERIO DI FIACCHEZZA]: Se \mathcal{F} è un fascio su X tale che per ogni $U \subseteq X$ aperto, ogni $s \in \mathcal{F}(U)$ e ogni $x \in U$ esistono un intorno V_x di x e una sezione $h \in \mathcal{F}(V_x)$ tali che $h|_{V_x \cap U} = s|_{V_x \cap U}$, allora \mathcal{F} è fiacco.

(Traccia di) dimostrazione. Fissato un aperto U di X e $s \in \mathcal{F}(U)$, alla famiglia

$$\mathcal{U} = \{(V, v) \mid v \in \mathcal{F}(V), v|_U = s\} \quad (2.33)$$

si applica il Lemma di Zorn: si mostra per assurdo che l'elemento massimale di \mathcal{U} deve essere (X, h_s) . \square

Esempio 6. Il fascio di gruppi abeliani grattacielo su $x \in X$, rispetto al punto chiuso x , chiamato $\mathcal{W}_{x,A}$ e definito da

$$\mathcal{W}_{x,A}(U) = \begin{cases} A & x \in U \\ 0 & x \notin U \end{cases} \quad (2.34)$$

è fiacco. Infatti le restrizioni $\mathcal{W}(X) \rightarrow \mathcal{W}(U)$ sono l'identità o la mappa zero a seconda che U contenga o no il punto x , dunque sono tutte epimorfismi.

Definizione 2.8 : Per ogni fascio di gruppi abeliani \mathcal{F} sullo spazio X definiamo il fascio di Godement come

$$\mathcal{G}^0 \mathcal{F} : U \mapsto \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \quad (2.35)$$

con le restrizioni $\mathcal{G}^0 \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{G}^0 \mathcal{F}(U) : s = (s_x)_{x \in V} \mapsto (s_x)_{x \in U}$ per ogni $U \subseteq V$ aperti. Si verifica facilmente che questo è un fascio.

Osservazione 2.10 : In effetti la corrispondenza $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{G}^0 \mathcal{F}$ definisce un funtore $\text{Sh}(X) \rightarrow \text{Sh}(X)$; Se definiamo $Y = \prod_{x \in X} \{x\}$, c'è un'ovvia funzione continua $p : Y \rightarrow X$. Grazie alla Osservazione 2.2, c'è una coppia di funtori aggiunti $p^* \dashv p_*$. Il funtore $\mathcal{G}^0(-)$ allora si può vedere come la composizione $p_* p^*$ dei due funtori in questione, e la freccia $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}^0(\mathcal{F})$ come il morfismo unità di questa aggiunta (e quindi \mathcal{G}^0 è l'endofuntore di una monade in $\text{Sh}(X)$).

Osservazione 2.11 : \mathcal{G}^0 è un funtore esatto.

Dimostrazione. Se $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ è una sequenza esatta corta di fasci, e indichiamo con $(-)_x$ il funtore “passaggio alla spiga in x ”, \mathcal{G}^0 risulta dalla composizione di due funtori esatti. Allora la sequenza

$$0 \longrightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{F}'_x \longrightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \longrightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{F}''_x \longrightarrow 0 \quad (2.36)$$

è esatta. □

Proposizione 2.5 : Per ogni $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X)$, il fascio $\mathcal{G}^0 \mathcal{F}$ è fiacco.

Dimostrazione. Segue immediatamente dal fatto che le sezioni globali si possono riguardare come funzioni $X \rightarrow \prod_{x \in X} \mathcal{F}_x$; da ciò, possiamo definire una sezione globale a partire da ogni sezione locale s su U , ponendo per esempio

$$(s'_x)_{x \in X} = \begin{cases} s_x & x \in U \\ 0 & x \notin U \end{cases} \quad (2.37) \quad \square$$

Proposizione 2.6 [RISOLUZIONE DI GODEMENT]: Il seguente risultato dovuto a Godement (cfr. [God]) dimostra che la coomologia di un fascio \mathcal{F} si può calcolare usando una risoluzione di fasci fiacchi. Raccogliamo in un unico enunciato quanto necessario: la dimostrazione è classica.

1. La famiglia $\{\mathcal{G}^0(\mathcal{F})\}_{\mathcal{F} \in \text{Sh}(X)}$ è cogenerante in $\text{Sh}(X)$, e in particolare ogni fascio \mathcal{F} ammette un monomorfismo verso il suo fascio di Godement;
2. Per ogni fascio \mathcal{F} esiste una risoluzione

$$\mathcal{G}^\bullet \mathcal{F} : 0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}^0 \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}^1 \mathcal{F} \rightarrow \dots \quad (2.38)$$

fatta di fasci fiacchi;

2.2. COOMOLOGIA.

3. Se $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ è una sequenza esatta di fasci, ed \mathcal{F}' è fiacco, $0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}') \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi} \Gamma(X, \mathcal{F}'') \rightarrow 0$ è una sequenza esatta di gruppi abeliani (o moduli);
4. Se $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow 0$ è una sequenza esatta di fasci, ed $\mathcal{F}', \mathcal{F}$ sono fiacchi, \mathcal{L} è fiacco;
5. Fasci fiacchi sono aciclici;
6. $H^k(\Gamma(X, \mathcal{G}^\bullet \mathcal{F})) \cong H^k(X, \mathcal{F})$ per ogni $k \geq 0$, $\mathcal{G}^\bullet \mathcal{F}$ essendo la risoluzione di fasci fiacchi determinata al punto 2.

Dimostrazione. • Guardando sempre le sezioni globali di \mathcal{F} come funzioni $X \rightarrow \prod_{x \in X} \mathcal{F}_x$, possiamo definire

$$\mathcal{F}(U) \ni s \mapsto (s(x)) \in \mathcal{G}^0 \mathcal{F}(U) \quad (2.39)$$

ed è immediato verificare che questo è un monomorfismo di fasci.

- Dimostriamo per induzione su $n \geq -1$ che esiste una successione $\{\mathcal{G}^i \mathcal{F}\}_{i \leq n}$ di fasci fiacchi e morfismi di fasci come nel claim; abbiamo già definito $\mathcal{G}^0 \mathcal{F}$, ottenendo $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{d_{-1}} \mathcal{G}^0 \mathcal{F}$. Poniamo ora

$$\begin{cases} \mathcal{G}^{n+1} \mathcal{F} := \mathcal{G}^0(\text{coker } d_{n-1}), \\ d_n: \mathcal{G}^n \mathcal{F} \rightarrow \text{coker } d_{n-1} \hookrightarrow \mathcal{G}^0(\text{coker } d_{n-1}) \end{cases} \quad (2.40)$$

ora $\mathcal{G}^{n+1} \mathcal{F}$ è fiacco perché ottenuto mediante $\mathcal{G}^0(-)$, e la sequenza è esatta: nella sequenza

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{G}^{n-1} \mathcal{F} & \xrightarrow{d_{n-1}} & \mathcal{G}^n \mathcal{F} & \xrightarrow{d_n} & \mathcal{G}^{n+1} \mathcal{F} \\ & \searrow p_{n-2} & \nearrow i_{n-1} & \searrow p_{n-1} & \nearrow i_n \\ & & \text{coker } d_{n-2} & & \text{coker } d_{n-1} \end{array} \quad (2.41)$$

per costruzione $p_k d_k = 0$ per ogni k .

- È sufficiente provare l'esattezza di $\Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}'') \xrightarrow{\varphi} 0$; questa segue dal fatto che, per ogni $s'' \in \mathcal{F}''(X)$, alla famiglia

$$\{(U, s) \mid U \subseteq X, s \in \mathcal{F}(U), \varphi(s) = s''|U\} \quad (2.42)$$

parzialmente ordinata da $(U, s) \preceq (V, t) \iff U \subseteq V, t|U = s$, si applica il Lemma di Zorn. L'elemento massimale deve a questo punto essere (X, s) .

Gli ultimi tre punti si possono reperire in qualsiasi libro sull'argomento (e addirittura in molti libri di Algebra Omologica, ad esempio in [Rot]). \square

Fasci soffici.

Definizione 2.9 : $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X)$ si dice *soffice* se per ogni chiuso $K \subseteq X$ $\Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(K, \mathcal{F}) := \varinjlim_{U \supset K} \Gamma(U, \mathcal{F})$ è un epimorfismo.

Ricordiamo che X è uno spazio *normale* se soddisfa l'assioma di separazione τ_4 (ogni coppia di chiusi disgiunti ammette intorni aperti disgiunti).

Necessitiamo di un certo numero di lemmi di carattere topologico per procedere:

Lemma 2.2 : Sia $\{U_i\}$ un ricoprimento aperto localmente finito di uno spazio topologico normale X . Allora esiste un raffinamento di questo ricoprimento, $\{V_i\}$, tale che $\overline{V_i} \subset U_i$ per ogni $i \in I$.

Dimostrazione. Accettando una qualsiasi delle forme equivalenti dell'assioma della scelta, possiamo ben ordinare I ; rispetto a tale buon ordinamento poniamo

$$F_1 := X \setminus \bigcup_{i>1} U_i \quad (2.43)$$

F_1 è ovviamente un chiuso contenuto in U_1 ; per ipotesi di normalità esiste un aperto che separa F_1 e U_1^c ; sia questo aperto V_1 : $F_1 \subset V_1$, $\overline{V_1} \subset U_1$. Supponendo ora di aver costruito V_j per ogni $j < i$ poniamo

$$F_i := X \setminus \left(\bigcup_{j<i} V_j \cup \bigcup_{k>i} U_k \right) \quad (2.44)$$

F_i è un chiuso contenuto in U_i e per normalità esiste V_i aperto che lo separa da U_i^c .

Resta da dimostrare che quello ottenuto in questo modo è un ricoprimento di X : se $x \in X$, esistono solo un numero finito di U_i che contengono x , diciamo U_{i_1}, \dots, U_{i_n} ; sia $i = \max\{i_1, \dots, i_n\}$ nell'ordinamento precedente: allora $x \notin U_k$, per ogni $k > i$. Ora possono accadere due cose

- $x \in V_j$ per qualche $j < i$, e si conclude.
- $x \notin V_j$ per ogni $j < i$, e dunque $x \in F_i \subset V_i$. □

Il Lemma in questione si applica particolarmente a spazi paracompatti (che sono notoriamente normali).

Il risultato seguente stabilisce che per ogni ricoprimento chiuso localmente finito vale il secondo assioma di fascio.

Lemma 2.3 : Sia X è uno spazio topologico e $\{C_i\}$ un ricoprimento chiuso localmente finito. Se $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X)$ ed esistono $f_i \in \mathcal{F}(C_i)$ tali che $f_i = f_j$ su $C_i \cap C_j$, allora esiste un'unica sezione $f \in \mathcal{F}(X)$ tale che $f|_{C_i} = f_i$.

Dimostrazione. È evidente che esiste una unica funzione su X che coincide con f_i su C_i , e precisamente quella che manda $x \in C_i \subset X$ in $f_i(x)$; va provato che (riguardando implicitamente le sezioni del fascio come funzioni $U \rightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$) questa è una effettiva sezione continua. Ora, x ha per ipotesi un intorno aperto U_x che interseca solo un numero finito di chiusi C_{i_1}, \dots, C_{i_n} ; a meno di restringere U_x per non fargli intersecare i chiusi che non hanno questa proprietà, possiamo pensare che ogni C_{i_k} contenga x : posso inoltre restringerlo ancora, e pensare $U_x \subset \bigcap_{k=1}^n C_{i_k}$ (qui è indispensabile che i chiusi siano in numero finito). Allora esiste una sezione $g \in \mathcal{F}(U_x)$ tale che $g(x) = f(x) = f_{i_k}(x)$ per ogni $k = 1, \dots, n$. Si vede velocemente che questo implica che $f(z) = g(z)$ per ogni $z \in U_x$, e dunque f è una sezione continua. \square

Il seguente risultato permette di estendere le sezioni definite su $S \subseteq X$ ad un qualche intorno aperto di S .

Proposizione 2.7 : Sia $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X)$, $S \subset X$, $f \in \mathcal{F}(S)$. Se S ammette un sistema fondamentale di intorni paracompatti, allora f si estende ad una sezione su un qualche intorno aperto di S .

Dimostrazione. Per definizione di $\mathcal{F}(S)$ un elemento $f \in \mathcal{F}(S)$ è una classe di equivalenza (siccome il limite è fatto su un insieme diretto, ne possediamo una rappresentazione esplicita molto comoda). Un qualsiasi rappresentante sarà una coppia (U, g) dove $g \in \mathcal{F}(U)$. Ma allora g è un'estensione di f ad un intorno aperto di S . \square

Si ha immediatamente il seguente

Corollario 4 : Se X è uno spazio paracompatto, ogni fascio fiacco è sofficе.

Dimostrazione. Se \mathcal{F} è fiacco ed S è un chiuso, si ha la sequenza

$$\mathcal{F}(X) \twoheadrightarrow \mathcal{F}(U_S) \rightarrow \mathcal{F}(S) \quad (2.45)$$

la prima freccia è un epimorfismo per fiacchezza, e la seconda per il lemma precedente (U_S è l'intorno di S lì determinato). Si conclude che \mathcal{F} è sofficе. \square

Osservazione 2.12 : Se X è uno spazio topologico paracompatto, ogni $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ il cui dominio è chiuso in X si estende ad una $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ (questo risultato cade sotto il nome di *Lemma di estensione di Tietze*, che quindi si può rifrasare dicendo che C_X^0 è un fascio di anelli sofficе su X).

Proposizione 2.8 : Se \mathcal{R} è un fascio di anelli sofficе su X , ogni fascio di \mathcal{R} -moduli su X è sofficе.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{F} \in \text{Mod}(\mathcal{R})$. Ogni $f \in \mathcal{F}(S)$, con S chiuso, ammette una estensione a un intorno aperto Ω di S . Ora, se definiamo

$$\mathcal{R}(X) \ni \psi = \begin{cases} 1 & \text{su } S \\ 0 & \text{su } X \setminus \Omega \end{cases} \quad (2.46)$$

allora $\psi \cdot f$ estende f a X (si pone $\psi f \equiv 0$ su $X \setminus \Omega$). \square

Corollario 5 : Se X è una varietà topologica paracompatta, ed $\mathcal{F} \in \text{Mod}(C_X^0)$, \mathcal{F} è aciclico. Se X è una varietà liscia paracompatta, ed $\mathcal{F} \in \text{Mod}(C_X^\infty)$, \mathcal{F} è aciclico.

Teorema 2.1 [CARATTERE LOCALE DELLA MORBIDEZZA.]: Sia X uno spazio paracompatto. Se per ogni $x \in X$ esiste un intorno U_x tale che per ogni chiuso $S \subseteq U_x$ la restrizione $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(S)$ è un epimorfismo, allora \mathcal{F} è soffice.

Dimostrazione. Per paracompattezza è possibile trovare un ricoprimento localmente finito di X e raffinarlo come nel Lemma 2.2 ottenendo $V_i: F_i = \overline{V}_i \subset U_i$. Dopo averlo fatto, si applica il Lemma di Zorn all'insieme $E = \{(g, J) \mid J \subseteq I, g \in \mathcal{F}(\cup_{i \in J} F_i) = \mathcal{F}(F_J), g|_{S \cap F_J} = f|_{S \cap F_J}\}$ con la relazione di ordine parziale

$$(g_1, J_1) \prec (g_2, J_2) \iff J_1 \subseteq J_2, g_1 = g_2 \text{ su } F_{J_1} \quad (2.47)$$

(si osservi che $E \neq \emptyset$ per la Proposizione 2.7). \square

Proposizione 2.9 : Se la sequenza

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0 \quad (2.48)$$

è esatta di fasci e \mathcal{F}, \mathcal{G} sono soffici, anche \mathcal{H} è soffice.

Dimostrazione. Identica al caso fiacco. \square

Teorema 2.2 : Sia $\{U_i\}$ un ricoprimento aperto di X paracompatto. Se \mathcal{F} è un fascio soffice su X , ed $f \in \mathcal{F}(X)$, allora esiste una *partizione di f* subordinata a $\{U_i\}$, ossia esiste una famiglia di sezioni $\{f_i\}$ tale che

- $\{\text{supp } f_i\}$ è una famiglia localmente finita di chiusi;
- $\text{supp } f_i \subset U_i$;
- $\sum f_i = f$ su X .

Dimostrazione. Per paracompattezza possiamo supporre il ricoprimento localmente finito, ed applicare il Lemma 2.2 trovando un raffinamento $\{V_i\}$ tale che $F_i = \overline{V_i} \subset U_i$ per ogni $i \in I$.

Sia ora $E = \{\{f_i\}_{i \in J} \mid J \subseteq I, f_i \in \mathcal{F}(X), \text{supp } f_i \subset U_i, \sum_{i \in J} f_i = f \text{ su } F_J = \bigcup_{i \in J} F_i\}$. Se \mathcal{F} è soffice, $E \neq \emptyset$ (si prenda U_i tale che $(\text{supp } f_i) \cap U_i \neq \emptyset$; $f|_{\text{supp } f_i \cap F_i}$ si estende a F_i). Ora, all'insieme (E, \prec) , dove

$$\{f_i\}_{J_1} \prec \{f_i\}_{J_2} \iff J_1 \subseteq J_2 \quad (2.49)$$

si applica il Lemma di Zorn. \square

2.3 Fasci coerenti e ampi, dualità di Serre.

2.3.1 Fasci Coerenti.

Usiamo questa sezione per richiamare brevemente le definizioni principali di fascio coerente, ampio e molto ampio. L'argomento è classico, e qualsiasi referenza è adeguata.

Definizione 2.10 [FASCIO QUASI COERENTE]: Sia X uno spazio topologico. Un fascio \mathcal{F} di \mathcal{O}_X -moduli si dice *quasi-coerente* se per ogni $p \in X$ esiste un intorno aperto dU di p tale che la sequenza di \mathcal{O}_X -moduli

$$\mathcal{O}|_U^{\oplus I} \longrightarrow \mathcal{O}|_U^{\oplus J} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0 \quad (2.50)$$

sia esatta, per certi insiemi di indici (eventualmente infiniti) I, J .

Questa definizione si può vedere come un analogo fascio-teoretico della nozione di modulo: la cosa si particularizza alla seguente

Definizione 2.11 [FASCIO COERENTE]: Un fascio \mathcal{F} di \mathcal{O}_X -moduli si dice *coerente* se

- È un \mathcal{O}_X -modulo finitamente generato (ovvero esiste una sequenza esatta del tipo $\mathcal{O}_X^n \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$);
- per ogni aperto $U \subseteq X$, e ogni omomorfismo di \mathcal{O}_U -moduli $\varphi: \mathcal{O}_U^n \rightarrow \mathcal{F}$, $\ker \varphi$ è un \mathcal{O}_X -modulo finitamente generato.

Se i fasci quasi-coerenti sono un analogo dei moduli su un anello, quelli coerenti sono allora un analogo, nel contesto della teoria dei fasci, dei moduli finitamente generati. Ovviamente un fascio coerente è anche quasi coerente.

Si può organizzare la classe di tutti i fasci (quasi-)coerenti di \mathcal{O}_X -moduli in una sottocategoria piena di $\text{Mod}(\mathcal{O}_X)$, da denotarsi $\text{QCoh}(X)$ e $\text{Coh}(X)$; queste categorie hanno proprietà relativamente buone. Per esempio vale un lemma “due di tre”:

Lemma 2.4 : Sia $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ una sequenza esatta di fasci di \mathcal{O}_X -moduli; se due qualsiasi dei tre fasci sono coerenti, allora lo è anche il terzo.

E alcuni limiti e colimiti fatti in $\text{Coh}(X)$ non escono da $\text{Coh}(X)$.

Teorema 2.3 : Siano \mathcal{F}, \mathcal{G} due fasci coerenti di \mathcal{O}_X -moduli, e $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo di fasci. Allora $\ker \varphi$, $\text{im } \varphi$, $\text{coker } \varphi$ sono tutti fasci coerenti.

Omettiamo la dimostrazione: il Lemma 2.4 è l'unico ingrediente complicato per dimostrare l'ultimo Teorema.

2.3.2 Fasci ampi e molto ampi.

Definizione 2.12 [FASCIO MOLTO AMPIO]: Un fascio invertibile \mathcal{L} su una varietà X è detto *molto ampio* se esiste una immersione $i: X \rightarrow \mathbb{P}^r$, per qualche $r \geq 1$ tale che $i^*(\mathcal{O}_X(1)) \cong \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(n)$ è l' n -esimo twist di Serre).

Il fascio \mathcal{L} dipende dall'immersione i ; se X è proiettiva, ossia $X \cong \mathbf{Proj}(S)$ per qualche anello graduato S , allora il fascio $\mathcal{O}_X(1)$ è molto ampio.

Definizione 2.13 : Sia X una varietà. Un fascio $\mathcal{F} \in \text{Mod}(\mathcal{O}_X)$ è *generato mediante sezioni globali* se esiste una famiglia $\{s_i\} \subset \Gamma(X, \mathcal{F})$ tale che per ogni $x \in X$ si abbia $\langle \{s_{i,x}\} \rangle = \mathcal{F}_x$ come \mathcal{O}_x -modulo.

Un teorema di Serre afferma che se \mathcal{L} è molto ampio su una varietà proiettiva X , per ogni fascio coerente \mathcal{F} esiste un intero n_0 tale che ogni $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$, per $n \geq n_0$, è generato mediante sezioni globali (si dice per brevità che $\{\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}\}_n$ è *definitivamente* generata da sezioni globali); questo conduce alla seguente definizione, più generale e per certi versi più maneggevole, di *fascio ampio*:

Definizione 2.14 : Un fascio invertibile \mathcal{L} è *ampio* se per ogni fascio coerente \mathcal{F} , la sequenza $\{\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}\}_n$ è definitivamente generata da sezioni globali.

Un fascio molto ampio su una varietà proiettiva è anche ampio, come conseguenza del seguente Teorema dovuto a Serre:

Teorema 2.4 : Se X è una varietà proiettiva e $\mathcal{F} \in \text{Coh}(X)$, allora esiste un intero n_0 tale che $\mathcal{F}(n) := \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n)$ è definitivamente generata da sezioni globali.

Il viceversa non è vero, ma è possibile dimostrare che la nozione di fascio ampio è in senso opportuno una stabilizzazione della nozione di fascio molto ampio:

Proposizione 2.10 : Sia \mathcal{L} un fascio invertibile su una varietà X ; allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

- \mathcal{L} è un fascio ampio;
- $\mathcal{L}^{\otimes m}$ è ampio per ogni $m > 0$;
- $\mathcal{L}^{\otimes m}$ è ampio per qualche $m > 0$.

2.3.3 Dualità di Serre.

Ricordiamo che se X è una varietà liscia di dimensione n il suo *fascio canonico* è definito come la potenza esterna massima del fascio dei differenziali Ω_X : $\omega_X := \bigwedge^n \Omega_X$; esso è per costruzione un fascio invertibile. Se X è proiettiva e non singolare, al fascio canonico è possibile associare un certo numero di invarianti, come il *genere geometrico*

$$p_g := \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \omega_X) \quad (2.51)$$

o più estesamente l'intera successione dei *plurigeneri* $p_g^r = \dim H^0(X, \omega_X^{\otimes r})$, o l'anello pluricanonico (che però è un invariante solo rispetto a $\mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X)$)

$$R(X) := \bigoplus_{r \geq 1} H^0(X, \omega_X^{\otimes r}). \quad (2.52)$$

Che i plurigeneri (così come la *pluridimensione* o *dimensione di Kodaira* della varietà, la dimensione proiettiva dell'anello pluricanonico) siano un invariante birazionale è un risultato classico, cfr. ad esempio il Teorema **8.19** in [Har].

A tutta prima è un fatto inaspettato che il fascio canonico di X abbia un ruolo nell'enunciato della *dualità di Serre* per X : se \mathcal{F} è un fascio coerente su $X = \mathbb{P}_K^n$ si ha una dualità perfetta $\text{hom}(\mathcal{F}, \omega_X) \times H^n(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^n(X, \omega_X) \cong K$, che in effetti è caso particolare di un isomorfismo naturale in \mathcal{F}

$$H^k(X, \mathcal{F})^\vee \cong \text{Ext}_X^{n-k}(\mathcal{F}, \omega_X) \quad (2.53)$$

(dove con $\text{Ext}_X^{n-k}(\mathcal{F}, \omega_X)$ si intende $\mathfrak{N}^{n-k}\Gamma(X, \text{Hom}(\mathcal{F}, \omega_X))$), per ogni k .

Ancora più stupefacente però è che il fascio canonico e il suo legame con la dualità di Serre siano intimamente legati alla struttura della categoria $\mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X)$; storicamente infatti una delle motivazioni per introdurre le categorie derivate di categorie di fasci da parte di Grothendieck e Verdier fu proprio la possibilità di generalizzare la dualità di Serre (cfr. [Cal]). Queste idee sono state recentemente portate alla loro massima generalità da Bondal e Kapranov, introducendo la definizione di *funtore di Serre* in una categoria k -lineare.

Il punto di vista di Grothendieck nel generalizzare la dualità di Serre fu volto a trovare un *aggiunto destro* al funtore $f_*: \text{Sh}(X) \rightarrow \text{Sh}(Y)$ per un morfismo $f: X \rightarrow Y$; si ricordi (cfr. l'Osservazione **2.2** a pagina 51) che a priori f_* ammette solo un aggiunto a sinistra, l'immagine inversa f^{-1} (o in categorie di \mathcal{O}_X -moduli, f^*). In generale, anche un funtore esatto ad ambo i lati non è obbligato ad avere due aggiunti (ma questa condizione è necessaria), e ancor più in generale esistono dei criteri che danno condizioni sufficienti affinché un funtore lo ammetta, ma sono tutti in pratica piuttosto difficili da controllare.

Il problema sembra insolubile finché non notiamo che uno dei vantaggi dell'aver sostituito $\text{Coh}(X)$ con $\mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X)$ è aver rimpiazzato tutti i funtori, e in particolare f_* ,

con la loro controparte esatta, in particolare $\mathfrak{R}f_*$: almeno in linea di principio quindi può esistere un aggiunto destro per f_* . Se ora andiamo a controllare come questo ipotetico aggiunto, chiamiamolo $f^!$, dovrebbe essere fatto in un caso semplice come quello dell'unico morfismo $f: X \rightarrow \{pt\}$, otteniamo

$$\mathrm{hom}_{pt}(\mathfrak{R}f_*\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong \mathrm{hom}_X(\mathcal{F}, f^!\mathcal{G}) \quad (2.54)$$

per ogni $\mathcal{F} \in \mathbf{D}_{\mathrm{coh}}^b(X)$, $\mathcal{G} \in \mathbf{D}_{\mathrm{coh}}^b(\{pt\})$. Ora, gli oggetti di $\mathbf{D}_{\mathrm{coh}}^b(\{pt\})$ sono tutti estremamente semplici, dato che si spezzano come somme dirette finite di shift del fascio costante \mathbb{C} . Prendiamo allora come prototipo di \mathcal{G} il fascio costante \mathbb{C} , e per semplificare ancora di più la discussione supponiamo che il fascio \mathcal{F} corrisponda a un complesso concentrato al grado k ; sappiamo ora che

$$\mathrm{hom}_{pt}(\mathfrak{R}f_*\mathcal{F}[k], \mathbb{C}) \cong H^k(X, \mathcal{F})^\vee; \quad (2.55)$$

a questo punto entra in gioco la dualità di Serre, che porge l'isomorfismo

$$H^k(X, \mathcal{F})^\vee \cong \mathrm{Ext}_X^{n-k}(\mathcal{F}, \omega_X) = \mathrm{hom}_{\mathbf{D}_{\mathrm{coh}}^b(X)}(\mathcal{F}[k], \omega_X[n]). \quad (2.56)$$

Se ora *imponiamo* che $\omega_X[n]$ sia l'immagine di \mathbb{C} mediante il funtore $f^!$, $f^!\mathbb{C} = \omega_X[\dim X]$, data la semplice struttura di $\mathbf{D}_{\mathrm{coh}}^b(\{pt\})$, abbiamo definito (quantomeno sugli oggetti) l'intero funtore $f^!$: si ha infatti

$$\begin{aligned} \mathrm{hom}_{pt}(\mathfrak{R}f_*\mathcal{F}[k], \mathcal{G}) &\cong \mathrm{hom}_{pt}(\mathfrak{R}f_*\mathcal{F}[k], \bigoplus \mathbb{C}[i_r]) \cong \bigoplus \mathrm{hom}_{pt}(\mathfrak{R}f_*\mathcal{F}[k], \mathbb{C}[i_r]) \\ &\cong \bigoplus \mathrm{hom}_X(\mathcal{F}[k], f^!\mathbb{C}[i_r]) \cong \bigoplus \mathrm{hom}_X(\mathcal{F}[k], \omega_X[n + i_r]) \\ &\cong \mathrm{hom}_X(\mathcal{F}[k], \bigoplus \omega_X[n + i_r]) = \mathrm{hom}_X(\mathcal{F}[k], f^!\mathcal{G}), \end{aligned}$$

e dunque se poniamo $f^!: \mathcal{G} \mapsto \bigoplus \omega_X[\dim X + i_r]$ otteniamo per costruzione un aggiunto destro di f_* .

Funtori di Serre.

La costruzione precedente permette di provare il seguente

Teorema 2.5: Dato un morfismo di schemi lisci $f: X \rightarrow Y$, il funtore $\mathfrak{R}f_*: \mathbf{D}_{\mathrm{coh}}^b(X) \rightarrow \mathbf{D}_{\mathrm{coh}}^b(Y)$ ammette un aggiunto destro, denotato $f^!: \mathbf{D}_{\mathrm{coh}}^b(Y) \rightarrow \mathbf{D}_{\mathrm{coh}}^b(X)$, e definito da

$$f^!: \mathcal{G} \mapsto \mathfrak{L}f^*(\mathcal{G} \otimes \omega_Y^{-1}[-\dim Y]) \otimes \omega_X[\dim X]. \quad (2.57)$$

Osservazione 2.13: Si osservi che questa definizione è in completo accordo con il caso $Y = \{pt\}$ e $f: X \rightarrow \{pt\}$.

La generalizzazione aggiuntiva, proposta da Bondal e Kapranov in [BoK] e ripresa da Bondal e Orlov in [Orl], "categorifica" il ruolo del fascio canonico nella dualità di Serre, trovandone un analogo in una generica categoria k -lineare.

Definizione 2.15 [FUNTORE DI SERRE]: Sia k un campo, e \mathbf{C} una categoria k -lineare. Un'autoequivalenza $\mathcal{S}: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ è detta *funtole di Serre* per \mathbf{C} se esiste un isomorfismo naturale in entrambe le componenti,

$$\varphi_{AB}: \text{hom}_{\mathbf{C}}(A, B) \cong \text{hom}_{\mathbf{C}}(B, \mathcal{S}(A))^{\vee} \quad (2.58)$$

o quel che è equivalente, un isomorfismo binaturale tra gli hom-spazi vettoriali $\text{hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ e $\text{hom}_{\mathbf{C}}(\mathcal{S}^{-1}(B), A)^{\vee}$, per ogni coppia di oggetti $A, B \in \mathbf{C}$.

Osservazione 2.14: A rigore, dovremmo dire che un funtole di Serre è una *coppia* $(\mathcal{S}, \varphi_{AB})$: la famiglia di isomorfismi $\{\varphi_{AB}\}$ è parte integrante della definizione.

Possiamo già notare alcune proprietà interessanti: quel che stupisce è la facilità con cui esse possono venir verificate.

Proposizione 2.11: Sia \mathbf{C} una categoria k -lineare con una struttura triangolata; chiamiamo $(-)[1]$ il funtole di sospensione. Allora, se \mathbf{C} ammette un funtole di Serre, esso è unico a meno di un'unica trasformazione naturale, è un funtole triangolato, commuta con il funtole di shift, e se $\mathcal{F}: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ è un'equivalenza di categorie triangolate, e \mathbf{C} ammette un funtole di Serre \mathcal{S} , si può dare anche a \mathbf{D} un funtole di Serre tale che

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{S} \cong \mathcal{S}' \circ \mathcal{F}. \quad (2.59)$$

Dimostrazione. Se sono dati due funtori di Serre \mathcal{S}, \mathcal{T} , componendo gli isomorfismi

$$\text{hom}(B, \mathcal{T}(A)) \cong \text{hom}(A, B)^{\vee} \cong \text{hom}(B, \mathcal{S}(A)) \quad (2.60)$$

si ottiene che $\mathcal{S}(A) \cong \mathcal{T}(A)$, naturalmente nell'oggetto B e nell'oggetto A .

Mostriamo ora che \mathcal{S} commuta con il funtole di sospensione:

$$\begin{aligned} \text{hom}(A, \mathcal{S}(B[1])) &\cong \text{hom}(B[1], A)^{\vee} \cong \text{hom}(B, A[-1])^{\vee} \\ &\cong \text{hom}(A[-1], \mathcal{S}(B)) \cong \text{hom}(A, (\mathcal{S}(B))[1]). \end{aligned}$$

La tesi, ora come prima, segue dal fatto che la corrispondenza $B \mapsto \text{hom}(-, B)$ riflette gli isomorfismi (come conseguenza del Lemma di Yoneda).

In modo del tutto analogo si dimostra che \mathcal{S} commuta con qualsiasi autoequivalenza; per finire, è immediato controllare che $\mathcal{F} \circ \mathcal{S} \circ \mathcal{G}$ (dove \mathcal{G} è il quasi-inverso di \mathcal{F}) è un funtole di Serre su \mathbf{D} che ha, per costruzione, la proprietà voluta. \square

Un'altro fatto sorprendente, di dimostrazione immediata, è che un funtole tra categorie k -lineari dotate di un funtole di Serre che ammette un aggiunto sinistro \mathcal{G} , ne ammette anche uno destro, ottenuto dalla composizione

$$\mathcal{S}_{\mathbf{C}} \circ \mathcal{G} \circ \mathcal{S}_{\mathbf{D}}^{-1}: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C} \quad (2.61)$$

Dimostrazione. C'è la catena di isomorfismi, tutti binaturali

$$\mathrm{hom}(\mathcal{F}(X), Y) \cong \mathrm{hom}(\mathcal{S}_{\mathbf{D}}^{-1}(Y), \mathcal{F}(X))^{\vee} \quad (2.62)$$

$$\cong \mathrm{hom}(\mathcal{G}\mathcal{S}_{\mathbf{D}}^{-1}(Y), X)^{\vee} \quad (2.63)$$

$$\cong \mathrm{hom}(X, \mathcal{S}_{\mathbf{C}}\mathcal{G}\mathcal{S}_{\mathbf{D}}^{-1}(Y)). \quad \square$$

Quest'ultimo risultato è tutto quanto serve per dare a $\mathfrak{R}f_*$ un aggiunto destro, e dimostrare quindi il Teorema 2.5: la dualità di Serre dà a $\mathbf{D}_{\mathrm{coh}}^b(X)$ e $\mathbf{D}_{\mathrm{coh}}^b(X)$ dei funtori di Serre, e dunque la posizione (2.57) definisce l'aggiunto cercato. \square

Osservazione 2.15 : Grazie alla versione derivata dell'isomorfismo alla Proposizione 2.1, si ha

$$\mathfrak{L}f^*(\mathcal{G} \otimes \omega_Y[\dim Y]) \cong \mathfrak{L}f^*\mathcal{G} \otimes f^*\omega_Y[\dim Y], \quad (2.64)$$

col che si può riscrivere $f^! = \mathfrak{L}f^*(-) \otimes \omega_{X/Y}[\dim f]$, dove $\omega_{X/Y} := \omega_X \otimes f^*\omega_Y^{-1}$ e $\dim f := \dim X - \dim Y$.

2.4 Il teorema di ricostruzione di Orlov.

Comme il s'agit de catégories il y a des flèches, des diagrammes. Il y a peu, très peu, ou pas du tout de calculs.[...] Jean est un géomètre, un géomètre des catégories, pas un algébriste. Il calcule peu, je dirais le moins possible.

J. Roubaud

L'unicità di un funtore di Serre in una categoria k -lineare lo rende una ricca fonte di informazioni a proposito della categoria stessa: in effetti esso è stato sfruttato principalmente per il teorema che è l'oggetto di questo lavoro, il risultato centrale di [Orl], in cui si ricostruisce una varietà X (liscia, proiettiva e irriducibile) partendo dalla sua categoria $\mathbf{D}_{\mathrm{coh}}^b(X)$ dei fasci coerenti: a patto che il fascio canonico o quello anticanonico di X siano ampi.

Notazioni. Se $x \in X$ è un punto chiuso, scriviamo $k(x)$ per il campo residuo in x , ovvero per $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$. La scrittura $\mathcal{F}[i]$ indica, qui come altrove, l'immagine di un fascio \mathcal{F} mediante il funtore di sospensione di $\mathbf{D}_{\mathrm{coh}}^b(X)$; indichiamo con $\mathcal{S}_{\mathbf{D}_{\mathrm{coh}}^b(X)} = - \otimes \omega_X[\dim X]$ il funtore di Serre di $\mathbf{D}_{\mathrm{coh}}^b(X)$. Per i funtori derivati di hom usiamo spesso $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathrm{hom}^i(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := \mathfrak{R}^i \mathrm{hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

In [Orl] non appare chiaro se la definizione di fascio “grattacielo sopra x ” sia quella canonica (cfr. ad esempio [Har], pag. 68), per cui $\mathrm{sky}_x(U) = \mathcal{O}_{X,x}$ se

$U \ni x$ e zero altrimenti, o piuttosto $\text{sky}_x(U) = k(x)$: questa seconda scelta non classica è però implicitamente evidente dalla condizione (i) della definizione di oggetto puntuale.

Definizione 2.16 : Sia $\mathcal{P} \in \mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X)$, s un numero intero; esso si dice *oggetto puntuale di codimensione s* se le seguenti condizioni sono verificate

- $\mathcal{S}_{\mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X)}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}[s]$;
- $\text{hom}^{<0}(\mathcal{P}, \mathcal{P}) = 0$;
- $\text{hom}^0(\mathcal{P}, \mathcal{P}) = \text{hom}(\mathcal{P}, \mathcal{P}) = k(\mathcal{P})$;

dove $k(\mathcal{P})$ è un'estensione di k .

Gli oggetti puntuali di $\mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X)$ sono il corrispettivo dei punti chiusi di X , in un senso che è precisato dalla seguente

Proposizione 2.12 : Sia X una varietà liscia con fascio canonico o anticanonico ampio. Allora un oggetto $\mathcal{P} \in \mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X)$ è puntuale se e solo se $\mathcal{P} \cong \text{sky}_x[r]$ (il fascio grattacielo su $x \in X$, shiftato di r) per qualche punto chiuso $x \in X$, e un opportuno indice $r \in \mathbb{Z}$.

Dimostrazione. Se $x \in X$ è un punto chiuso, sky_x è un oggetto puntuale di dimensione $n = \dim X$: infatti $\mathcal{S}_{\mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X)}(\text{sky}_x) = \text{sky}_x[\dim X]$, essenzialmente perché si può controllare spiga per spiga $((\text{sky}_x \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X[\dim X]) \cong k(x) \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \omega_{X,x}[\dim X] = k(x)[\dim X])$, perché ω_X è un fascio invertibile; cfr. ad esempio [Sch1], pag. 88); in secondo luogo $\text{hom}(\text{sky}_x, \text{sky}_x) = \Gamma(X, \mathcal{H}om(\text{sky}_x, \text{sky}_x)) \cong k$ e da ultimo $\mathfrak{R}^{-i} \mathcal{H}om(\text{sky}_x, \text{sky}_x) \cong \mathfrak{L}^i \mathcal{H}om(\text{sky}_x, \text{sky}_x) \cong 0$ perché sky_x è un funtore esatto a sinistra (ammette un aggiunto sinistro, il funtore delle spighe).

Viceversa, se supponiamo che un oggetto \mathcal{P} goda delle proprietà (i)-(iii), indichiamo con \mathcal{H}^i la i -esima coomologia del fascio \mathcal{P} . Osserviamo alcune cose:

- Da (i) segue che la codimensione di \mathcal{P} è $s = \dim X = n$: infatti, se $\mathcal{P} \otimes \omega_X[n] \cong \mathcal{P}[s]$, è chiaro che $\mathcal{P} \cong \mathcal{P} \otimes \omega_X[n-s]$, e per induzione $\mathcal{P} \cong (\mathcal{P} \otimes \omega_X^{\otimes r})[(n-s)r]$ per ogni $r \in \mathbb{Z}_{\geq}$. Questo però implica che $n = s$, perché $\mathcal{P} \in \mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X)$ deve essere un complesso limitato; la tesi segue.
- In modo simile, si ha $\mathcal{H}^i \otimes \omega_X \cong \mathcal{H}^i$: ciò segue dal fatto che un fascio localmente libero quale è il fascio (anti)canonico rende $-\otimes \omega_X$ un funtore esatto, quindi (per un fatto generale, cfr. ad esempio [Rot] pag. 339) $\mathcal{H}^i = H^i(X, \mathcal{P} \otimes \omega_X) \cong H^i(X, \mathcal{P}) \otimes \omega_X \cong \mathcal{H}^i \otimes \omega_X$.

- Dal momento che ω_X è ampio o antiampio, concludiamo che ogni \mathcal{H}^i è un fascio di lunghezza finita, ossia il suo supporto $\bigcap \{U \subseteq X \mid \mathcal{H}^i|_U = 0\}^c$ consiste di un insieme di punti chiusi tutti isolati: dal punto precedente, iterando la tensorizzazione con ω_X sull'isomorfismo $\mathcal{H}^i \cong \mathcal{H}^i \otimes \omega_X$ otteniamo

$$\mathcal{H}^i \cong \mathcal{H}^i \otimes \omega_X^{\otimes r} \quad (2.65)$$

cosa che non può accadere se $\dim \operatorname{supp}(\mathcal{H}^i) \geq 1$ (verrebbe violato il Teorema di Riemann-Roch, che ha come corollario il fatto che $\dim H^0(\mathcal{H}^i \otimes \omega_X^{\otimes r})$ “cresce con r ” con un termine $(\dim X)c^r$; ciò non è possibile (dato che gli \mathcal{H}^i sono di lunghezza finita) a meno che essi non siano supportati su una varietà di dimensione zero, ossia su un insieme discreto (finito) di punti; l'indecomponibilità di \mathcal{P} , mostrata al prossimo punto, implica infine che questo supporto debba essere connesso, ergo un singolo punto.

- Fasci che hanno supporto in punti differenti di questo insieme sono omologicamente ortogonali, ovvero $\operatorname{hom}^s(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 0$ per ogni $x \neq y$ e $s \geq 0$, perciò ogni oggetto siffatto si scompone nella somma diretta di quelli che hanno il supporto di tutti i fasci di coomologia su uno stesso punto. Per la proprietà (iii), l'oggetto \mathcal{P} è indecomponibile (se $\mathcal{P} \cong \bigoplus \mathcal{P}_i$, allora $\operatorname{hom}(\mathcal{P}, \mathcal{P})$ sarebbe decomponibile, fatto vietato da (iii)), quindi tutti i \mathcal{H}^i hanno supporto concentrato in un unico punto chiuso x .

Consideriamo ora la sequenza spettrale di Künneth

$$E_2^{p,q} = \bigoplus_{k-j=q} \operatorname{hom}^p(\mathcal{H}^j, \mathcal{H}^k) \implies \operatorname{hom}^{p+q}(\mathcal{P}, \mathcal{P}) \quad (2.66)$$

che calcola $\operatorname{Ext}^m(\mathcal{P}, \mathcal{P})$ a partire da $\operatorname{hom}^i(\mathcal{H}^j, \mathcal{H}^k)$, tra ogni coppia di fasci di lunghezza finita che hanno per supporto lo stesso punto, esiste un morfismo non banale.

Considerando $\operatorname{hom}^0(\mathcal{H}^j, \mathcal{H}^k) = \operatorname{hom}(\mathcal{H}^j, \mathcal{H}^k)$ con j, k minimi tali che $k - j$ in $E_2^{0, k-j}$ sia non nullo: si osservi innanzitutto che deve essere $k - j = q \leq 0$, dato che per quanto provato prima $\operatorname{hom}(\mathcal{H}^j, \mathcal{H}^j) \neq 0$. In seconda battuta possiamo notare che questo spazio sopravvive fino al limite E_∞ della successione ($E_r^{0,q}$ è infatti stazionaria: si veda l'Osservazione dopo **B.14**, pag. 92), e dunque per (ii) deve essere $k - j = 0$; questo significa che tutti i fasci di coomologia sono banali, tranne quello all'indice $k = j$. La proprietà (ii) implica infine che \mathcal{P} sia un fascio grattacielo sul singolo punto chiuso dove è concentrato il suo supporto, quindi è quasi-isomorfo a un fascio grattacielo su un punto chiuso. Questo conclude la dimostrazione. \square

Definizione 2.17 : Sia $\mathcal{L} \in \mathbf{D}_{\operatorname{coh}}^b(X)$; esso si dice *invertibile* se esiste un $s \in \mathbb{Z}$ tale che le seguenti condizioni siano verificate per ogni oggetto puntuale di $\mathbf{D}_{\operatorname{coh}}^b(X)$:

- $\text{hom}^s(\mathcal{L}, \mathcal{P}) \cong k(\mathcal{P})$;
- $\text{hom}^k(\mathcal{L}, \mathcal{P}) = 0$ per ogni $k \neq s$.

Proposizione 2.13 : Sia X una varietà irriducibile liscia, tale che tutti gli oggetti puntuali abbiano la forma $\mathcal{O}_{X,x}[r]$ per qualche punto chiuso $x \in X$ e un opportuno indice $r \in \mathbb{Z}$. Allora $\mathcal{L} \in \mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X)$ è un oggetto invertibile se e solo se $\mathcal{L} \cong \mathcal{W}[t]$, per un opportuno fascio invertibile \mathcal{W} su X e un indice $t \in \mathbb{Z}$.

Dimostrazione. Se \mathcal{L} è un fascio invertibile, allora $\text{hom}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_x) \cong k(x)$ e $\text{Ext}^i(\mathcal{L}, \mathcal{O}_x) = 0$ per ogni $i \neq 0$. Quindi tutti i fasci del tipo $\mathcal{L}[s]$ sono oggetti invertibili in $\mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X)$.

Ora, se \mathcal{H}^i è la i -esima coomologia di un oggetto invertibile $\mathcal{L} \in \mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X)$, consideriamo ancora la successione spettrale di Künneth che calcola $\text{hom}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_x)$, per un punto $x \in X$, per mezzo di $\text{hom}^i(\mathcal{H}^j, \mathcal{O}_x)$:

$$E_2^{p,q} = \text{hom}^p(\mathcal{H}^{-q}, \mathcal{O}_x) \implies \text{Ext}^{p+q}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_x). \quad (2.67)$$

Sia ora $-q_0 = \max\{n \mid \mathcal{H}^n \neq 0\}$ (tale massimo esiste perché stiamo considerando complessi limitati, i cui oggetti di coomologia sono anch'essi limitati); allora per ogni punto chiuso $x \in \text{supp}(\mathcal{H}^{q_0})$ si ha $\text{hom}(\mathcal{H}^{-q_0}, \mathcal{O}_x) \neq 0$: il motivo è che nella sequenza

$$\dots \longrightarrow E_2^{-2,q_0+1} \longrightarrow E_2^{0,q_0} \longrightarrow E_2^{2,q_0-1} \longrightarrow \dots \quad (2.68)$$

sia $E_2^{-2,q_0+1} = \text{hom}^{-2}(\mathcal{H}^{-q_0-1}, \mathcal{O}_x)$ che $E_2^{2,q_0-1} = \text{hom}^2(\mathcal{H}^{-q_0+1}, \mathcal{O}_x)$ sono nulli, e dunque $E_2^{0,q_0} = \text{hom}(\mathcal{H}^{-q_0}, \mathcal{O}_x)$ resta intatto fino al limite della successione spettrale, e dunque (ragionando ancora per indecomponibilità, e usando la proprietà (i) degli oggetti invertibili) deve essere $\text{hom}(\mathcal{H}^{-q_0}, \mathcal{O}_x) = k(x)$.

Con un ragionamento analogo applicato alla stessa sequenza,

$$\dots \longrightarrow E_2^{-1,q_0+1} \longrightarrow E_2^{1,q_0} \longrightarrow E_2^{3,q_0-1} \longrightarrow \dots \quad (2.69)$$

si deduce che anche $\text{Ext}^1(\mathcal{H}^{q_0}, \mathcal{O}_x)$ sopravvive fino al limite $E_{\infty}^{*,*}$ della successione, e dunque si conclude che deve essere . Si noti che lo stesso procedimento non consente più di dedurre che anche gli altri gruppi Ext sono zero, perché per $p \geq 1$ si ha la sequenza

$$\dots \longrightarrow 0 \neq E_2^{p-2,q_0+1} \longrightarrow E_2^{p,q_0} \longrightarrow E_2^{p+2,q_0-1} \neq 0 \longrightarrow \dots \quad (2.70)$$

D'altra parte possiamo notare due cose:

- Se $\text{hom}^1(\mathcal{H}^{-q_0}, \mathcal{O}_x) = 0$, per ogni $x \in X$ allora \mathcal{H}^{-q_0} è localmente libero (cfr. [Har]);
- Se $\text{hom}(\mathcal{H}^{-q_0}, \mathcal{O}_x) = k(x)$ per ogni $x \in X$, allora \mathcal{H}^{-q_0} ha anche rango 1, dunque è un fascio invertibile.

Quindi, per ogni $x \in \text{supp}(\mathcal{H}^{q_0})$ si ha

- a. $\text{hom}(\mathcal{H}^{-q_0}, \mathcal{O}_x) = k(x)$;
- b. $\text{Ext}^1(\mathcal{H}^{-q_0}, \mathcal{O}_x) = 0$.

D'altra parte ora il diagramma

$$\begin{array}{ccccc} E_2^{-2, q_0+2} & \longrightarrow & E_2^{0, q_0+1} & \longrightarrow & E_2^{2, q_0} \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 = \text{hom}^{-2}(\mathcal{H}^{-q_0-2}, \mathcal{O}_x) & & \text{hom}(\mathcal{H}^{-q_0-1}, \mathcal{O}_x) & & \text{hom}^2(\mathcal{H}^{-q_0}, \mathcal{O}_x) = 0 \end{array}$$

permette di dedurre che $\text{hom}(\mathcal{H}^{-q_0-1}, \mathcal{O}_x) = 0$ per ogni $x \in X$, dunque $\mathcal{H}^{-q_0-1} = 0$. Ripetendo questo ragionamento per \mathcal{H}^q , $q < q_0$, si ottiene $\mathcal{H}^q = 0$ ogni volta che $q \neq q_0$, e dunque la tesi (ossia che \mathcal{L} è quasi-isomorfo ad un complesso del tipo $\mathcal{A}[s]$ per \mathcal{A} invertibile e $s \in \mathbb{Z}$ opportuni). \square

A questo punto, disponendo dei punti chiusi e dei fasci invertibili, possiamo provare il Teorema di ricostruzione vero e proprio, nella sua massima generalità:

Teorema 2.6 [RICOSTRUZIONE DI X DA $\mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X)$]: Sia X una varietà proiettiva liscia e irriducibile, con fascio canonico o anticanonico ampio. Se $\mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X)$ è equivalente, come categoria graduata, alla categoria $\mathbf{D}_{\text{coh}}^b(Y)$ per qualche altra varietà (proiettiva liscia e irriducibile) Y , allora $X \cong Y$.

Si noti che l'enunciato non è simmetrico in X e Y , perché la seconda varietà può non avere fascio canonico o anticanonico ampio.

Dimostrazione. La dimostrazione avviene in vari passi. Chiamiamo $\mathcal{F}: \mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X) \rightarrow \mathbf{D}_{\text{coh}}^b(Y)$ l'equivalenza data tra le categorie derivate, che useremo per far corrispondere oggetti puntuali e oggetti invertibili dell'una con quelli dell'altra, e per "abbassare" questa corrispondenza al livello degli spazi.

- Sia \mathfrak{p}_D l'insieme delle classi di isomorfismo degli oggetti puntuali di $\mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X)$, e \mathfrak{p}_X l'insieme delle classi di isomorfismo di oggetti di $\mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X)$ definito da

$$\mathfrak{p}_X := \{\mathcal{O}_x[k] \mid x \in X, k \in \mathbb{Z}\} \quad (2.71)$$

Dalla Proposizione 2.12 segue che $\mathfrak{p}_Y \cong \mathfrak{p}_X$. Ora, supponiamo che ci sia un oggetto puntuale $\mathcal{P} \in \mathfrak{p}_D$ che non sta in \mathfrak{p}_Y . Due oggetti di \mathfrak{p}_D sono o mutualmente ortogonali, oppure sono collegati da una traslazione $\mathcal{P} \xrightarrow{(-)[r]} \mathcal{P}'$ per qualche $r \in \mathbb{Z}$. Segue da ciò che $\mathcal{P} \in \mathbf{D}_{\text{coh}}^b(Y)$ è ortogonale ad ogni fascio grattacielo \mathcal{O}_y , per $y \in Y$, ed è perciò il fascio zero: $0 = \text{hom}(\mathcal{P}, \mathcal{O}_y[r]) \cong \text{hom}(\mathcal{P}[-r], \mathcal{O}_y)$, dunque $\mathcal{P}[-r] = 0$, ovvero $\mathcal{P} = 0$. Allora $\mathfrak{p}_Y = \mathfrak{p}_D = \mathfrak{p}_X$.

- Sia l_X l'insieme delle classi di isomorfismo di oggetti di $\mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X)$ definito sotto, e l_D l'insieme delle classi di isomorfismo dei soli oggetti invertibili di $\mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X)$:

$$l_X := \{\mathcal{L}[k] \mid \mathcal{L} \text{ è un fascio invertibile su } X, k \in \mathbb{Z}\} \quad (2.72)$$

Per il passo 1, sia X che Y soddisfano i requisiti della Proposizione 2.13. Dunque $l_X = l_D = l_Y$.

- Fissiamo un oggetto invertibile $\mathcal{L}_0 \in \mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X)$, un fascio invertibile su X . Dal punto 2, \mathcal{L}_0 si può riguardare come un fascio invertibile su Y a meno di una traslazione.

Componendo se necessario l'equivalenza $\mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X) \rightarrow \mathbf{D}_{\text{coh}}^b(Y)$ con una traslazione, possiamo perciò assumere che \mathcal{L}_0 sia un vero e proprio fascio invertibile su Y . Ora, per il punto 1, l'insieme $p_D := \{\mathcal{P} \in p_D \mid \text{hom}(\mathcal{L}_0, \mathcal{P}) = k(\mathcal{P})\} \subset p_D$ coincide sia con $p_X = \{\mathcal{O}_x \mid x \in X\}$ che con $p_Y = \{\mathcal{O}_y \mid y \in Y\}$; questo porge una biiezione tra i punti di X e quelli di Y : dopo aver modificato, se necessario, l'equivalenza $\mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X) \rightarrow \mathbf{D}_{\text{coh}}^b(Y)$ in modo che l'immagine di un fascio invertibile (che è un oggetto invertibile per la Proposizione 2.13) \mathcal{L}_X di $\mathbf{D}_{\text{coh}}^b(X)$ sia un fascio invertibile su Y (e non solo un suo shift), disponiamo di una corrispondenza tra i punti chiusi di X e i punti chiusi di Y : sono precisamente gli oggetti puntuali \mathcal{P} tali che l'intero t nella Proposizione 2.13 sia zero. Abbiamo quindi realizzato una biiezione di insiemi

$$X \cong p_X = \{\mathcal{O}_x \mid x \in X\} \cong \{\mathcal{O}_y \mid y \in Y\} = p_Y \cong Y. \quad (2.73)$$

- Sia ora $l_X \subset l_D$ (risp. l_Y) l'insieme delle classi di isomorfismo di fasci invertibili su X (risp. su Y). Questi insiemi possono essere ricostruiti a partire dalla relazione

$$l_Y = l_X = l_D := \{\mathcal{L} \in l_D \mid \text{hom}(\mathcal{L}, \mathcal{P}) = k(\mathcal{P}) \forall \mathcal{P} \in p_D\}. \quad (2.74)$$

Per ogni coppia $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ di oggetti di l_D , per ogni $\alpha \in \text{hom}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ e ogni $\mathcal{P} \in p_D$ denotiamo $\alpha_{\mathcal{P}} = \text{hom}(\alpha, \mathcal{P})$, e $U_{\alpha} = \{\mathcal{P} \in p_D \mid \alpha_{\mathcal{P}}^* \neq 0\}$. Gli $\{U_{\alpha} \mid \alpha: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2\}$ così ottenuti sono evidentemente i complementari di insiemi degli zeri dei vari α : per brevità ci riferiamo ad essi chiamandoli *co-zeri*. Si ha

$$U_{\alpha} = \{\mathcal{P} \in p_D \mid \alpha_{\mathcal{P}}^* \neq 0\} \cong \{x \in X \mid \alpha_x^* \neq 0\} \cong \{y \in Y \mid \alpha_y^* \neq 0\}.$$

Si tratta di mostrare, ora che i co-zeri $\{U_{\alpha} \mid \alpha \in \text{hom}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2), \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in l_D\}$ sono una base di aperti di Zariski per X e Y ; da questo segue che le due

topologie coincidono, e la mappa di insiemi determinata poco sopra è una biiezione bicontinua.

Ciò si basa su un risultato dovuto a Illusie e apparso in [III] (precisamente la Proposizione 2.2.3): sia $\mathcal{L}_X^r := \mathcal{S}_{\mathbf{D}^{\text{coh}}(X)}^r \mathcal{L}_X[-r \dim X]$ (risp. $\mathcal{L}_Y^r := \mathcal{S}_{\mathbf{D}^{\text{coh}}(Y)}^r \mathcal{L}_Y[-r \dim Y]$): se ω_X è ampio o antiampio, i co-zeri U_β ottenuti da morfismi $\beta: \mathcal{L}_X^r \rightarrow \mathcal{L}_X^s$, per $r, s \in \mathbb{Z}$ sono una base di aperti di Zariski per X : similmente questo deve essere vero per Y , cosa che implica che ω_Y sia ampio o antiampio.

Ora, $\{\mathcal{L}_X^r\}_{r \in \mathbb{N}}$ consta precisamente dell'orbita di \mathcal{L}_X per l'azione del funtore $-\otimes \omega_X$ (infatti è semplice osservare che $(\mathcal{L}_X \otimes \omega_X)[r] \cong \mathcal{L}_X[r] \otimes \omega_X \cong \mathcal{L}_X \otimes (\omega_X[r])$ e che dunque $\mathcal{S}_{\mathbf{D}^{\text{coh}}(X)}^r \mathcal{L}_X[-r \dim X] = \mathcal{L}_X \otimes \omega_X^{\otimes r}$).

Per ogni coppia di indici $i, j \in \mathbb{N}$ è facile mostrare l'isomorfismo naturale $\text{hom}(\mathcal{L}_X^i, \mathcal{L}_X^j) \cong \text{hom}(\mathcal{L}_X^0, \mathcal{L}_X^{j-i})$ (perché $\mathcal{L}_X^0 = \mathcal{S}^0 \mathcal{L}_X[0] = \mathcal{L}_X$). Ora, l'anello

$$A := \bigoplus_{i \geq 0} \text{hom}(\mathcal{L}_X^0, \mathcal{L}_X^i) \quad (2.75)$$

ha una graduazione, per costruzione, e le sue parti graduate sono esattamente i vari $\text{hom}(\mathcal{L}_X^0, \mathcal{L}_X^i)$; questo anello è isomorfo all'anello pluricanonico di X , $R(X) = \bigoplus H^0(X, \omega_X^{\otimes i})$ (infatti per quanto appena osservato $\mathcal{L}_X^i \cong \mathcal{L}_X \otimes \omega_X^{\otimes i}$: si veda la definizione 2.52). Un ragionamento analogo produce un isomorfismo di anelli graduati tra $\bigoplus_{i \geq 0} \text{hom}(\mathcal{L}_Y^0, \mathcal{L}_Y^i)$ e $R(Y)$ (definito analogamente). Da ciò si deduce la presenza di un isomorfismo tra X e Y , perché avendo esse fascio canonico ampio o antiampio, entrambe si ottengono dal Proj del loro anello pluricanonico: la composizione

$$X \xrightarrow{\cong} \mathbf{Proj}(R(X)) \xrightarrow{\cong} \mathbf{Proj}(R(Y)) \xrightarrow{\cong} Y \quad (2.76)$$

dà l'isomorfismo biregolare richiesto. \square

Appendice A

CATEGORIE LOCALIZZATE

The mathematical red herring principle is the principle that in mathematics, a *red herring* need not, in general, be either red or a herring.

ncatlab.org/nlab/show/red+herring+principle

IL *calcolo delle frazioni* in una categoria \mathbf{C} , in quanto operazione di inversione formale dei morfismi di una sottocategoria di \mathbf{C} , è stato inizialmente introdotto da Gabriel e Zisman in teoria dell'omotopia (vedi [Zis]); presentate le idee di base, ne usiamo una istanza particolare, quella che si trova nelle categorie triangolate.

Per evitare disagi di tipo fondazionale, assumiamo di lavorare in un universo fissato da cui presupponiamo che le costruzioni che faremo non usciranno. L'assiomatica di base non sarà ovviamente trattata in nessuna parte di questo lavoro: il lettore interessato al problema degli universi può consultare [GrS4].

La nozione di localizzazione di una categoria non è, formalmente parlando, molto diversa dal processo per cui un anello commutativo $(R, +, \cdot)$ viene localizzato rispetto ad un sistema moltiplicativo¹: Si tratta, in un caso come nell'altro, di rendere invertibili (nel caso categoriale rendere un isomorfismo, nel caso insiemistico rendere un elemento invertibile per moltiplicazione: il lettore più disincantato può ovviamente osservare che il primo caso include il secondo) tutti gli elementi di un certo insieme.

¹Un'esposizione che mette in chiara luce questa analogia è in *Lectures on modules and rings* di T.Y. Lam, pp. 299 e segg.

A.1 Categorie quoziente.

Definizione A.1 [CATEGORIA LOCALIZZATA]: Se $\mathcal{F}: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ è un funtore tra due categorie, ed \mathbf{S} una sottocategoria di \mathbf{C} , diciamo che \mathcal{F} rende invertibili i morfismi di \mathbf{S} se $\mathcal{F}(s)$ è un isomorfismo in \mathbf{D} per ogni $s \in \text{hom}_{\mathbf{S}}(A, B)$. La categoria delle frazioni di \mathbf{C} rispetto a \mathbf{S} (o localizzata di \mathbf{C} rispetto a \mathbf{S}) è la coppia $(\mathbf{C}[\mathbf{S}^{-1}], \mathcal{Q}_{\mathbf{S}})$, dove $\mathcal{Q}_{\mathbf{S}}: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}[\mathbf{S}^{-1}]$ è un funtore, e la coppia è soggetta alla seguente proprietà universale:

$\mathcal{Q}_{\mathbf{S}}$ rende invertibili i morfismi di \mathbf{S} , e ogni altro funtore $\mathcal{F}: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ che li rende invertibili si fattorizza in un unico modo attraverso la categoria $\mathbf{C}[\mathbf{S}^{-1}]$, in modo che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}[\mathbf{S}^{-1}] & \xrightarrow{\overline{\mathcal{F}}} & \mathbf{D} \\ \mathcal{Q}_{\mathbf{S}} \uparrow & \nearrow \mathcal{F} & \\ \mathbf{C} & & \end{array} \quad (\text{A.1})$$

si possa completare per un unico $\overline{\mathcal{F}}: \mathbf{C}[\mathbf{S}^{-1}] \rightarrow \mathbf{D}$.

Grazie a questa definizione, la categoria delle frazioni di \mathbf{C} rispetto ad \mathbf{S} , se esiste, è unica a meno di un'unica equivalenza di categorie.

C'è un procedimento costruttivo che esibisce $\mathbf{C}[\mathbf{S}^{-1}]$ a partire da \mathbf{C} e da \mathbf{S} , e lo abbiamo già incontrato definendo $\mathbf{D}(\mathbf{A})$. Partiamo considerando la categoria che ha gli stessi oggetti di \mathbf{C} , e definiamo come segue i morfismi tra due oggetti: se q è il grafo orientato che ha per vertici oggetti in \mathbf{C} e per lati elementi dell'insieme $\text{Mor}(\mathbf{C}) \amalg \{s^{-1}: Y \rightarrow X \mid s \in \text{hom}_{\mathbf{S}}(X, Y)\}$, indichiamo con $\text{Path}(q)$ l'insieme dei cammini in questo grafo (ossia consideriamo sequenze finite di morfismi componibili), dotato dell'ovvia operazione di concatenazione di cammini (la indichiamo provvisoriamente con \circ_P , ma abbandoneremo in un attimo questa pedanteria). $\text{Mor}(\mathbf{C}[\mathbf{S}^{-1}])$ è allora definito come il quoziente di $P = \text{Path}(q)$ per le relazioni seguenti:

- Ogni occorrenza di $b \circ_P a$ si può sostituire con $b \circ a$, per ogni coppia di morfismi $a, b \in \text{Mor}(\mathbf{C})$;
- Ogni occorrenza di id_X può essere rimossa dal cammino;
- Ogni occorrenza di $s^{-1} \circ_P s, s \circ_P s^{-1}$ può essere rimossa (ossia: sostituita con un'opportuna freccia identica, e poi rimossa grazie alla seconda condizione), per ogni $s \in \text{Mor}(\mathbf{S})$.

La concatenazione in P induce la legge di composizione che rende $\mathbf{C}[\mathbf{S}^{-1}]$ effettivamente una categoria. Il funtore $\mathcal{Q}_{\mathbf{S}}$ è l'identità sugli oggetti, e sulle frecce è definito

dalla composizione

$$\text{Mor}(\mathbf{C}) \hookrightarrow \text{Mor}(\mathbf{C}) \amalg \text{Mor}(\mathbf{S})^{-1} \hookrightarrow \text{Path}(\mathfrak{q}) \rightarrow \text{Mor}(\mathbf{C}[\mathbf{S}^{-1}]) \quad (\text{A.2})$$

dove tutte le frecce sono canoniche (le prime, inclusioni, la terza la proiezione sull'insieme quoziente).

Osservazione A.1 : La categoria così ottenuta è detta *localizzazione* di \mathbf{C} rispetto ad \mathbf{S} , o più spesso *categoria delle frazioni* rispetto a \mathbf{S} .

Osservazione A.2 : È uso di molti testi sull'argomento prendere un generico insieme di morfismi di \mathbf{C} , invece che una sua sottocategoria: d'altra parte è evidente che le due scelte sono equivalenti. Da un lato la cosa è ovvia, e dall'altro un generico sottoinsieme di morfismi di \mathbf{C} individua una sottocategoria i cui oggetti sono domini e codomini dei suddetti.

A.2 Calcolo delle frazioni.

Definizione A.2 : Sia \mathbf{C} una categoria, \mathbf{S} una sua sottocategoria. La categoria delle frazioni rispetto a \mathbf{S} ammette una descrizione elementare nel momento in cui si facciano su \mathbf{S} delle assunzioni aggiuntive. Diciamo che \mathbf{S} *ammette un calcolo delle frazioni sinistro* se le seguenti proprietà sono valide:

LF1 Ogni coppia di morfismi $X' \xleftarrow{s} X \xrightarrow{f} Y$, con $s \in \text{Mor}(\mathbf{S})$, può essere completato ad un quadrato commutativo (in generale non in modo unico):

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ s \downarrow & & \downarrow s' \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array} \quad (\text{A.3})$$

con f' morfismo generico e $s' \in \text{Mor}(\mathbf{S})$.

LF2 Se $a, b: X \rightarrow Y$ sono morfismi di \mathbf{C} , ed esiste un morfismo di \mathbf{S} che li equalizza, allora ne esiste anche un altro che li coequalizza.

Osservazione A.3 : Si può dare la definizione duale di *calcolo delle frazioni destro*, invertendo la direzione di tutte le frecce. Solitamente si dice che \mathbf{S} è un *sistema moltiplicativo* se ne ammette uno destro e uno sinistro.

Assumiamo ora che \mathbf{S} possieda un calcolo delle frazioni sinistro; la categoria delle frazioni ottenuta al paragrafo precedente ammette allora una descrizione più

semplice perché è possibile “accoppiare” i denominatori e i numeratori delle sequenze formali di morfismi in un’unica “frazione” del tipo

$$(a, s): X \xrightarrow{a} Y' \xleftarrow{s} Y \quad (\text{A.4})$$

diagramma che prende il nome di *frazione sinistra* rispetto a \mathbf{S} . Definiamo una categoria $\mathbf{C}_{\mathbf{S}}$ che ha per oggetti gli stessi di \mathbf{C} e dove l’insieme $\text{hom}_{\mathbf{C}_{\mathbf{S}}}(X, Y)$ risulta dall’insieme delle frazioni sinistre quozientato per la relazione che identifica (a, s) e (b, t) se e solo se esiste un’altra frazione sinistra $Y' \xrightarrow{z} Z \xleftarrow{v} Y''$ all’interno di un diagramma commutativo del tipo

$$\begin{array}{ccccc} & & & Z & \\ & & & \nearrow & \nwarrow \\ & & & v & \\ & & & Y'' & \\ & & & \nwarrow & \nearrow \\ & & & s & \\ & & & Y & \\ & & & \nwarrow & \nearrow \\ & & & t & \\ & & & Y'' & \\ & & & \nwarrow & \nearrow \\ & & & b & \\ & & & Y' & \\ & & & \nwarrow & \nearrow \\ & & & a & \\ & & & X & \end{array} \quad (\text{A.5})$$

La composizione di due classi di equivalenza $[a, s]$ e $[b, t]$ è per definizione la classe di equivalenza di $(b' \circ a, s' \circ t)$, dove a', b' sono ottenuti grazie alla proprietà LF2 enunciata sopra completando il diagramma $\bullet \xleftarrow{s} Y \xrightarrow{b} \bullet$ ad un quadrato commutativo: si prova facilmente che questa definizione è ben data (ossia cambiando rappresentanti per $[a, s]$ e $[b, t]$ si resta nella classe di $[b' \circ a, s' \circ t]$), e dunque rende $\mathbf{C}_{\mathbf{S}}$ una categoria. Otteniamo anche un funtore canonico

$$\mathcal{P}_{\mathbf{S}}: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}_{\mathbf{S}} \quad (\text{A.6})$$

che è l’identità sugli oggetti e che manda $a: X \rightarrow Y$ nella classe di equivalenza della coppia (a, id_Y) .

Le verifiche per mostrare che $\mathbf{C}_{\mathbf{S}}$ gode della proprietà universale di $\mathbf{C}[\mathbf{S}^{-1}]$ sono tutte di routine: la suddetta proprietà universale garantisce che sia valida la seguente

Proposizione A.1: Il funtore $\mathcal{F}: \mathbf{C}_{\mathbf{S}} \rightarrow \mathbf{C}[\mathbf{S}^{-1}]$, che è l’identità sugli oggetti e che manda un morfismo $[a, s] \in \text{hom}_{\mathbf{C}_{\mathbf{S}}}(X, Y)$ in $(\mathcal{Q}_{\mathbf{S}}(s))^{-1} \circ \mathcal{Q}_{\mathbf{S}}(a)$ è un isomorfismo.

Grazie a questa proposizione possiamo a tutti gli effetti identificare $\mathbf{C}_{\mathbf{S}}$ e $\mathbf{C}[\mathbf{S}^{-1}]$ non appena \mathbf{S} ammetta un calcolo delle frazioni (destra o sinistra).

A.3 Localizzazione in Categorie Triangolate.

Definizione A.3: Si ricordi la Definizione 1.9; se \mathbf{T} è una categoria triangolata, $(-)[1]$ è il suo funtore di sospensione e \mathbf{S} un sistema moltiplicativo in \mathbf{T} , diciamo che \mathbf{S} è *compatibile* con la triangolazione se

- $s[n] = s[1]^n \in \text{Mor}(\mathbf{S})$ per ogni $s \in \text{Mor}(\mathbf{S})$ ed ogni $n \in \mathbb{Z}$;
- Se denotiamo con una terna (f, g, h) un morfismo di triangoli in \mathbf{T} , e due qualsiasi dei tre morfismi stanno in \mathbf{S} , esiste un altro morfismo di triangoli fatto dai suddetti due e da un terzo morfismo di \mathbf{S} .

Lemma A.1 : Sia \mathbf{T} una categoria triangolata, \mathbf{S} un suo sistema moltiplicativo compatibile con la triangolazione. Allora la categoria delle frazioni $\mathbf{T}[\mathbf{S}^{-1}]$ eredita naturalmente una struttura triangolata canonica, tale che il funtore naturale $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}[\mathbf{S}^{-1}]$ sia esatto (ossia l'immagine di un triangolo distinto sia ancora un triangolo distinto).

Dimostrazione. L'autoequivalenza $(-)[1]: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ ne induce una $\mathbf{T}[\mathbf{S}^{-1}] \rightarrow \mathbf{T}[\mathbf{S}^{-1}]$, che commuta con il funtore naturale $\mathcal{Q}_{\mathbf{S}}: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}[\mathbf{S}^{-1}]$ (questo segue dal fatto che \mathbf{S} è chiusa rispetto a $(-)[1]$); ora, definiamo un triangolo distinto in $\mathbf{T}[\mathbf{S}^{-1}]$ come un qualsiasi triangolo isomorfo all'immagine mediante $\mathcal{Q}_{\mathbf{S}}$ di un triangolo distinto di \mathbf{T} . Resta da verificare è che con questa posizione $\mathbf{T}[\mathbf{S}^{-1}]$ soddisfa agli assiomi della Definizione 1.9: è un procedimento lungo, ma affatto difficile. Una dimostrazione, rivolta al lettore interessato, si può trovare in [Gel]. Il funtore \mathcal{Q} ora è esatto per costruzione (si noti che la condizione di esattezza per un funtore $\mathcal{F}: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'$ è equivalente a quella per cui $\mathcal{F} \circ \mathcal{S} \cong \mathcal{S}' \circ \mathcal{F}$, \mathcal{S} e \mathcal{S}' essendo i funtori di sospensione rispettivamente di \mathbf{T} e \mathbf{T}' , e si noti che allora quest'ultima condizione vale per costruzione della sospensione in $\mathbf{T}[\mathbf{S}^{-1}]$). \square

Raccogliamo alcuni esempi, incontrati durante l'esposizione, di sistemi moltiplicativi compatibili in categorie triangolate.

Definizione A.4 : Un funtore $\mathcal{F}: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{A}$ si dice *coomologico* se manda ogni triangolo distinto in \mathbf{T} in una sequenza esatta in \mathbf{A} .

Esempio 7. Se \mathbf{T} è una categoria triangolata, i due funtori $\text{hom}_{\mathbf{T}}(X, -)$ e $\text{hom}_{\mathbf{T}}(-, X)$ sono coomologici.

Proposizione A.2 : Sia $\mathcal{H}: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{A}$ un funtore coomologico. Allora la classe \mathbf{S} di tutti i morfismi di \mathbf{T} tali che $\mathcal{H}(\mathcal{S}^n(s))$ è un isomorfismo per ogni $n \in \mathbb{Z}$ è un sistema moltiplicativo compatibile con la triangolazione.

Dimostrazione. Si noti che è sufficiente mostrare che \mathbf{S} ha un calcolo delle frazioni destro oppure sinistro: la presenza dell'altro segue dal fatto che la condizione che definisce \mathbf{S} è autoduale.

LF1 Questo assioma segue dal fatto che \mathcal{H} è un funtore;

LF2 Sia $\alpha: X \rightarrow Y$ un generico morfismo di \mathbf{T} e $s: X \rightarrow X'$ uno in \mathbf{S} . Il diagramma seguente è completato da un certo α' ad un morfismo di triangoli.

$$\begin{array}{ccccccc} W & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\alpha} & Y & \longrightarrow & \mathcal{S}(W) \\ \parallel & & \downarrow s & & \downarrow s' & & \parallel \\ W & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & \mathcal{S}(W) \end{array} \quad (\text{A.7})$$

Ora applicando il lemma dei 5 classico si conclude che anche s' sta in \mathbf{S} : per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si ha il diagramma

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{H}^n(W) & \longrightarrow & \mathcal{H}^n(X) & \longrightarrow & \mathcal{H}^n(Y) & \longrightarrow & \mathcal{H}^{n+1}(W) \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ \mathcal{H}^n(W) & \longrightarrow & \mathcal{H}^n(X') & \longrightarrow & \mathcal{H}^n(Y') & \longrightarrow & \mathcal{H}^{n+1}(W) \end{array} \quad (\text{A.8})$$

cui si può applicare il lemma dei 5 in versione classica.

LF3 Siano $\alpha, \beta \in \text{hom}_{\mathbf{T}}(X, Y)$ e $s \in \text{hom}_{\mathbf{S}}(X', X)$ che li equalizzi. Il morfismo s compare in un triangolo distinto $X' \xrightarrow{s} X \xrightarrow{\varphi} X'' \rightarrow \mathcal{S}(X')$, e $\alpha - \beta$ fattorizza attraverso φ con un qualche $\psi: X'' \rightarrow Y$. Anche ψ ora compare in un triangolo distinto $X'' \xrightarrow{\psi} Y \xrightarrow{\tau} Y' \rightarrow \mathcal{S}(X'')$. Allora τ appartiene a \mathbf{S} e $\tau \circ \alpha = \tau \circ \beta$.

Resta da controllare che \mathbf{S} è compatibile con la triangolazione, ed in effetti è sufficiente controllare la seconda delle due condizioni nella definizione A.3; questa segue da una applicazione del lemma dei 5 al diagramma

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{H}(C[-1]) & \longrightarrow & \mathcal{H}(A) & \longrightarrow & \mathcal{H}(B) & \longrightarrow & \mathcal{H}(C) \longrightarrow \dots \\ h[-1]^* \downarrow & & \downarrow f^* & & \downarrow g^* & & \downarrow h^* \\ \mathcal{H}(C'[-1]) & \longrightarrow & \mathcal{H}(A') & \longrightarrow & \mathcal{H}(B') & \longrightarrow & \mathcal{H}(C') \longrightarrow \dots \\ & & & & \dots & & \\ & & & & \dots & & \\ & & & & \downarrow f[1]^* & & \downarrow g[1]^* & & \downarrow h[1]^* \\ & & & & \dots & & \dots & & \dots \end{array}$$

(non appena si supponga che due su tre tra f, g, h siano isomorfismi, anche il terzo lo è). \square

A.3.1 Sottocategorie triangolate e localizzazione alla Verdier.

Definizione A.5 : Una sottocategoria triangolata di $(\mathbf{T}, \mathcal{S})$ è una sottocategoria non vuota tale che

- $\mathcal{S}^n(X) \in \mathbf{S}$ per ogni $X \in \mathbf{S}$ ed ogni $n \in \mathbb{Z}$;
- Se $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow \mathcal{S}(X)$ è un triangolo esatto in \mathbf{T} , e due su tre tra $\{X, Y, Z\}$ stanno in \mathbf{S} , allora ci sta anche il terzo.

Una sottocategoria triangolata di $(\mathbf{T}, \mathcal{S})$ si dice *folta* (o *spessa*) se vale in più la condizione

- Sia $X \xrightarrow{\pi} Y \xrightarrow{\iota} X$ tale che $\text{id}_Y = \pi \circ \iota$. Se X sta in \mathbf{S} , ci sta anche Y .

Osservazione A.4 : Si osservi che una sottocategoria triangolata \mathbf{S} di \mathbf{T} è folta se e solo se essa ammette coprodotti numerabili: questo è immediato corollario del Teorema A.1, dove si dimostra che in una categoria triangolata con coprodotti almeno numerabili ogni endomorfismo idempotente è spezzante.

Esempio 8. Se $\mathcal{F}: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{U}$ è un funtore additivo ed esatto tra categorie triangolate, il suo nucleo $\ker \mathcal{F}$, definito come la sottocategoria piena degli oggetti $\{X \mid \mathcal{F}(X) = 0\}$ è folta in \mathbf{T} .

Si può verificare quanto appena detto con un'applicazione immediata del Lemma dei 5 triangolato e della proprietà di rotazione.

Esempio 9. Se $\mathcal{F}: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{A}$ è coomologico, da una categoria triangolata ad una abeliana, allora $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \ker(\mathcal{F} \circ [n])$ è folta in \mathbf{T} .

Localizzazione alla Verdier. Se ora chiamiamo $\Sigma(\mathbf{S})$ l'insieme di tutti i morfismi $X \rightarrow Y$ che possono essere inseriti in un triangolo esatto $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow \mathcal{S}(X)$ con $Z \in \mathbf{S}$, allora vale il seguente

Lemma A.2 : $\Sigma(\mathbf{S})$ è un sistema moltiplicativo compatibile con la triangolazione di \mathbf{T} .

Dimostrazione. Si tratta della Proposizione 2.1.8 di [Ver]. La prova è simile a quella della nostra Proposizione A.2. \square

La localizzazione di \mathbf{T} rispetto ad \mathbf{S} sarà allora definita come

$$\mathbf{T}/\mathbf{S} := \mathbf{T}[\Sigma(\mathbf{S})^{-1}] \tag{A.9}$$

col funtore naturale di "proiezione" $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}/\mathbf{S}$. Chiudiamo la discussione raccogliendo alcune proprietà essenziali del funtore \mathcal{Q} nella seguente

Proposizione A.3 : Sia \mathbf{T} una categoria triangolata, ed \mathbf{S} una sottocategoria triangolata piena di \mathbf{T} . Il funtore $\mathcal{Q}: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}/\mathbf{S}$ sopra definito gode delle proprietà seguenti

- La categoria \mathbf{T}/\mathbf{S} ha un'unica struttura triangolata che rende \mathcal{Q} un funtore esatto;
- Una freccia di \mathbf{T} viene mandata a zero da \mathcal{Q} se e solo se si fattorizza lungo un oggetto in \mathbf{S} ;
- Ogni funtore esatto (risp. coomologico) $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{U}$ che manda a zero tutto \mathbf{S} fattorizza in modo unico attraverso \mathcal{Q} mediante un funtore esatto (risp. coomologico) $\mathbf{T}/\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{U}$.

Dimostrazione. La prima asserzione segue dal Lemma A.1. Per la seconda, $\mathcal{Q}(\varphi) = 0$ se e solo se esiste $\sigma \in \Sigma(\mathbf{S})$ tale che $\sigma \circ \varphi = 0$ (è immediato a partire dal fatto che $\mathcal{Q}(\sigma)$ è invertibile in \mathbf{T}/\mathbf{S}). Questo però avviene se e solo se φ si fattorizza lungo un oggetto di \mathbf{S} : da un lato, supponiamo che $\sigma \circ \varphi = 0$. Allora il diagramma

$$\begin{array}{ccccccc}
 A & \xrightarrow{0} & 0 & \longrightarrow & A[1] & \xrightarrow{-\text{id}_A} & A[1] \\
 \downarrow \varphi & & \downarrow & & \downarrow \cdots & & \downarrow -\varphi[1] \\
 B & \xrightarrow{\sigma} & C & \longrightarrow & D & \xrightarrow{q} & B[1]
 \end{array} \tag{A.10}$$

si può completare a un morfismo di triangoli con una $\tau: A[1] \rightarrow D$ tale che $\varphi[1] = q \circ \tau$, e D sta in \mathbf{S} per ipotesi. Ma allora $\varphi = q[-1] \circ \tau[-1]$ si fattorizza attraverso $D[-1] \in \mathbf{S}$. Da questo e dal fatto che il nucleo di un funtore triangolato è una sottocategoria triangolata del dominio, si deduce che il nucleo di \mathcal{Q} è la minima sottocategoria folta contenente \mathbf{S} .

Per quanto riguarda l'ultimo punto, ogni funtore \mathcal{F} che contenga \mathbf{S} nel suo nucleo rende invertibili tutti i morfismi di $\Sigma(\mathbf{S})$ (è sufficiente dedurre dal fatto che $\mathcal{F}(S) \rightarrow \mathcal{F}(C) \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{F}(S[1])$ è distinto, e dalla sequenza lunga della Proposizione 1.4, il fatto che $\mathcal{F}(S) \rightarrow \mathcal{F}(C)$ è un isomorfismo). Allora per la proprietà universale della localizzazione a pagina A.1, si ottiene un unico funtore $\tilde{\mathcal{F}}$ tale che $\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}} \circ \mathcal{Q}$. Questo $\tilde{\mathcal{F}}$ è esatto, per come sono definiti i triangoli distinti in \mathbf{T}/\mathbf{S} . \square

Quanto segue è il risultato cui accenna l'Osservazione A.4, per cui una sottocategoria triangolata di \mathbf{T} è folta se e solo se ammette coprodotti numerabili. Esiste una dimostrazione piuttosto elegante di questo fatto che fa uso della nozione di *colimite omotopico* di una sequenza: andiamo quindi a esporre brevemente la costruzione in questione.

Definizione A.6 : Se $(\mathbf{T}, \mathcal{S})$ è una categoria triangolata con coprodotti numerabili, e

$$\mathcal{X}: X_0 \xrightarrow{j_1} X_1 \xrightarrow{j_2} X_2 \xrightarrow{j_3} \dots \quad (\text{A.11})$$

è una sequenza di oggetti e morfismi in \mathbf{T} , il *colimite omotopico* di tale sequenza, denotato con $\underline{\text{hocolim}} X_i$ o più chiaramente con $\underline{\text{hocolim}} \mathcal{X}$, è definito a meno di un isomorfismo non canonico (determinabile con l'assioma TR5 della Definizione 1.9) come il triangolo distinto

$$\coprod_{i=0}^{\infty} X_i \xrightarrow{\text{id}-\text{sh}} \coprod_{i=0}^{\infty} X_i \longrightarrow \underline{\text{hocolim}} X_i \longrightarrow \mathcal{S}\left(\coprod_{i=0}^{\infty} X_i\right) \quad (\text{A.12})$$

Il morfismo $\text{sh}: \coprod_{i=0}^{\infty} X_i \rightarrow \coprod_{i=0}^{\infty} X_i$ (detto *shifting* della sequenza) è definito come la somma diretta di tutti i $j_k: X_{k-1} \rightarrow X_k$: dunque la mappa $\text{id}-\text{sh}$ è la “matrice infinita”

$$\begin{pmatrix} \text{id}_{X_0} & & & & & & & \\ -j_1 & \text{id}_{X_1} & & & & & & \\ & -j_2 & \text{id}_{X_2} & & & & & \\ & & -j_3 & \text{id}_{X_3} & & & & \\ & & & & \ddots & & & \end{pmatrix} \quad (\text{A.13})$$

La nozione di colimite omotopico non è *funtoriale* in alcuna accezione sensata, essendo definita a meno di un isomorfismo non unico. Tuttavia è possibile dimostrare che $\underline{\text{hocolim}} X_i$ ha la proprietà formalmente analoga a quella di un funtore additivo di “rispettare le somme dirette”:

Lemma A.3 : Se sono date due sequenze

$$X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow \dots \quad (\text{A.14})$$

$$Y_0 \longrightarrow Y_1 \longrightarrow Y_2 \longrightarrow \dots$$

allora, anche se non canonicamente, $\underline{\text{hocolim}} (X_i \oplus Y_i) \cong \underline{\text{hocolim}} X_i \oplus \underline{\text{hocolim}} Y_i$.

Dimostrazione. La somma diretta di due triangoli distinti è un triangolo distinto; perciò a partire da $\coprod_{i=0}^{\infty} X_i \rightarrow \coprod_{i=0}^{\infty} X_i \rightarrow \underline{\text{hocolim}} X_i \rightarrow^+$ e $\coprod_{i=0}^{\infty} Y_i \rightarrow \coprod_{i=0}^{\infty} Y_i \rightarrow \underline{\text{hocolim}} Y_i \rightarrow^+$ definiamo il triangolo somma

$$\coprod_{i=0}^{\infty} X_i \oplus \coprod_{i=0}^{\infty} Y_i \xrightarrow{\text{id}-\text{sh}} \coprod_{i=0}^{\infty} X_i \oplus \coprod_{i=0}^{\infty} Y_i \rightarrow \underline{\text{hocolim}} X_i \oplus \underline{\text{hocolim}} Y_i \rightarrow^+ \quad (\text{A.15})$$

Ora questo triangolo, con una semplice applicazione del Lemma dei 5 triangolato, porge un isomorfismo (non unico) tra $\underline{\text{hocolim}} (X_i \oplus Y_i)$ e $\underline{\text{hocolim}} X_i \oplus \underline{\text{hocolim}} Y_i$. \square

Il seguente Lemma è di dimostrazione immediata a partire dalla Definizione A.6:

Lemma A.4 : Sia $X \in \text{Ob}_{\mathbf{T}}$; definiamo rispettivamente *sequenza telescopica canonica* e *sequenza telescopica nulla* di X le sequenze

$$\mathcal{X}_1: X \xrightarrow{\text{id}_X} X \xrightarrow{\text{id}_X} X \xrightarrow{\text{id}_X} \dots \quad (\text{A.16})$$

$$\mathcal{X}_0: X \xrightarrow{0} X \xrightarrow{0} X \xrightarrow{0} \dots$$

Si ha $\text{hocolim} \mathcal{X}_1 \cong X$ e $\text{hocolim} \mathcal{X}_0 \cong 0$.

Teorema A.1 : Sia \mathbf{T} una categoria triangolata con coprodotti numerabili. Se $e: X \rightarrow X$ è tale che $e \circ e = e$, allora è spezzante, ossia esistono $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$ tali che $gf = e, fg = \text{id}_Y$.

Dimostrazione. Consideriamo le sequenze telescopiche associate ad e e ad $\text{id}_X - e$:

$$\mathcal{X}_e: X \xrightarrow{e} X \xrightarrow{e} X \xrightarrow{e} \dots \quad (\text{A.17})$$

$$\mathcal{X}_{\text{id}_X - e}: X \xrightarrow{\text{id}_X - e} X \xrightarrow{\text{id}_X - e} X \xrightarrow{\text{id}_X - e} \dots$$

Siano $Y = \text{hocolim} \mathcal{X}_e, Z = \text{hocolim} \mathcal{X}_{\text{id}_X - e}$. Per il Lemma A.3 $Y \oplus Z \cong \text{hocolim} (\mathcal{X}_e \oplus \mathcal{X}_{\text{id}_X - e}) = \text{hocolim} \mathcal{X}_{\binom{e}{\text{id}_X - e}}$. Si noti che la commutatività del diagramma seguente

$$\begin{array}{ccccccc} X \oplus X & \xrightarrow{\binom{e}{\text{id}_X - e}} & X \oplus X & \xrightarrow{\binom{e}{\text{id}_X - e}} & X \oplus X & \xrightarrow{\binom{e}{\text{id}_X - e}} & \dots \\ \downarrow \binom{e}{\text{id}_X - e} & & \downarrow \binom{e}{\text{id}_X - e} & & \downarrow \binom{e}{\text{id}_X - e} & & \\ X \oplus X & \xrightarrow{\binom{1}{0} \binom{0}{0}} & X \oplus X & \xrightarrow{\binom{1}{0} \binom{0}{0}} & X \oplus X & \xrightarrow{\binom{1}{0} \binom{0}{0}} & \dots \end{array} \quad (\text{A.18})$$

implica che ci sia un isomorfismo tra le due sequenze telescopiche $\mathcal{X}_{\binom{e}{\text{id}_X - e}}$ e $\mathcal{X}_{\binom{1}{0} \binom{0}{0}}$ (infatti è immediato notare che la mappa verticale è una involuzione). Col che $\text{hocolim} \mathcal{X}_{\binom{e}{\text{id}_X - e}} \cong \text{hocolim} \mathcal{X}_{\binom{1}{0} \binom{0}{0}}$. In particolare dato che la sequenza inferiore si spezza nella somma $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_0$, si ha $\text{hocolim} \mathcal{X}_{\binom{e}{\text{id}_X - e}} = X$ (in pratica quello che si è provato è che le mappe indotte $g: \text{hocolim} \mathcal{X}_e \cong Y \rightarrow X$ e $g': \text{hocolim} \mathcal{X}_{\text{id}_X - e} \cong Z \rightarrow X$ si possono scegliere in modo tale che $Y \oplus Z \cong X$). Da ultimo, si noti che esistono delle mappe canoniche, analoghe a quelle

universali dei colimiti non-omotopici, $f: X \rightarrow Y$, $f': X \rightarrow Z$ (si usa la proprietà di completamento e il lemma dei 5). Allora otteniamo due quadrati commutativi

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ e \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{\text{id}} & X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f'} & Z \\ \text{id} - e \downarrow & & \downarrow g' \\ X & \xrightarrow{\text{id}} & X \end{array} \quad (\text{A.19})$$

da cui seguono tutte le relazioni volute. \square

A.4 I funtori derivati come estensioni di Kan.

Data l'ubiquità con cui essa si presenta, più o meno nascostamente, non è stupefacente che Mac Lane scrivesse in [McL] che "la nozione di estensione di Kan sussume tutti i concetti fondamentali della teoria delle categorie": scopo di questo paragrafo è proporre la definizione di funtore derivato come estensione di Kan lungo un funtore. Essa risulta ispirata a [Mal], che studia cosa accade ai funtori derivati di una coppia di funtori aggiunti $\mathcal{F} \dashv \mathcal{G}$.

In effetti l'ambiente giusto in cui sviluppare le cose a questo livello di generalità è quello delle categorie modello: il funtore derivato sinistro (o destro) $\mathcal{L}\mathcal{F}$ ($\mathcal{R}\mathcal{F}$) di $\mathcal{F}: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$, se \mathbf{C} è una categoria modello, è precisamente l'estensione di Kan di \mathcal{F} lungo il funtore che localizza rispetto alle equivalenze deboli, $\mathbf{C} \rightarrow \text{Ho}(\mathbf{C})$. Tutto nasce in effetti da quel che avviene nella categoria dei complessi di catene in una categoria abeliana: in generale, trovare $\mathcal{L}\mathcal{F}(X)$ significa calcolare $\mathcal{F}(X_{\text{cof}})$ dove X_{cof} è un rimpiazzamento cofibrante di X . Nei complessi di catene, X_{cof} è una risoluzione proiettiva di X , e l'omologia di $\mathcal{L}\mathcal{F}(X)$ per \mathcal{F} esatto a destra coincide con la sequenza dei funtori derivati classici di \mathcal{F} . Per esempio, se $\mathcal{F} = - \otimes_R A$,

l'omologia di $\mathcal{L}\mathcal{F} = - \otimes_R A$ è $\text{Tor}_*^R(-, A)$.

Supponiamo dati due funtori $\mathcal{X}: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$, $\mathcal{F}: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$.

Definizione A.7: L'estensione di Kan destra di \mathcal{X} lungo \mathcal{F} consiste di una coppia (\mathcal{R}, η) , dove $\mathcal{R}: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$ è un funtore e $\eta: \mathcal{R}\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{X}$ che è universale rispetto a questa proprietà, ossia tale che per ogni funtore $\mathcal{M}: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$ e ogni trasformazione naturale $\underline{\mu}: \mathcal{M}\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{X}$, esiste un'unica $\underline{\delta}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{R}$ tale che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{R}\mathcal{F} & \\ \eta \swarrow & & \searrow \delta_* \mathcal{F} \\ \mathcal{X} & \xleftarrow{\underline{\mu}} & \mathcal{M}\mathcal{F} \end{array} \quad (\text{A.20})$$

sia commutativo.

La nozione di *estensione di Kan sinistra* si dà dualizzando questa: è una coppia $(\mathcal{L}, \underline{\eta})$, dove $\mathcal{L}: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$ è un funtore e $\underline{\eta}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{L}\mathcal{F}$ che è universale rispetto a questa proprietà, ossia tale che per ogni funtore $\mathcal{M}: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$ e ogni trasformazione naturale $\underline{\alpha}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{M}\mathcal{F}$, esiste un'unica $\underline{\sigma}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{R}$ tale che il diagramma

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{R}\mathcal{F} & \\
 \epsilon \nearrow & & \searrow \sigma * \mathcal{F} \\
 \mathcal{X} & \xrightarrow{\underline{\alpha}} & \mathcal{M}\mathcal{F}
 \end{array} \tag{A.21}$$

sia commutativo.

L'estensione di Kan destra di \mathcal{X} lungo \mathcal{F} si indica con $\text{Ran}_{\mathcal{F}}\mathcal{X}$, la sinistra con $\text{Lan}_{\mathcal{F}}\mathcal{X}$.

Osservazione A.5 : Condizione sufficiente all'esistenza dell'estensione di Kan sinistra di \mathcal{X} lungo \mathcal{F} è che il codominio di \mathcal{X} sia una categoria cocompleta.

Dimostrazione. Si veda [Bor1], pag. 123 e segg. □

Alla luce di questo risulta evidente che la definizione di funtore derivato di $\mathcal{F}: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ si può rifrasare come estensione di Kan, grazie alla proprietà universale che li caratterizza.

Se \mathbf{S} è una sottocategoria di \mathbf{A} e $\mathbf{A}[\mathbf{S}^{-1}]$ la localizzazione rispetto a \mathbf{S} , il *funtore derivato destro* di $\mathcal{F}: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ consiste di una coppia $(\mathfrak{R}\mathcal{F}, \underline{\alpha})$, dove $\mathfrak{R}\mathcal{F}: \mathbf{A}[\mathbf{S}^{-1}] \rightarrow \mathbf{B}$ e $\underline{\alpha}: \mathcal{F} \rightarrow \mathfrak{R}\mathcal{F} \circ \mathcal{Q}$ è una trasformazione naturale, se $\mathcal{Q}: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}[\mathbf{S}^{-1}]$ è il funtore canonico, tale che ogni altro funtore $\mathcal{G}: \mathbf{A}[\mathbf{S}^{-1}] \rightarrow \mathbf{B}$ cui è associata una trasformazione naturale $\underline{\gamma}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \circ \mathcal{Q}$ esiste un'unica $\underline{\delta}: \mathfrak{R}\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ per cui $\underline{\gamma} = (\underline{\delta} * \mathcal{Q}) \circ \underline{\alpha}$.

Tale condizione è esattamente quella che permette di asserire che

$$\mathfrak{R}\mathcal{F} \cong \text{Lan}_{\mathcal{Q}}\mathcal{F}. \tag{A.22}$$

Ovviamente è possibile dualizzare la cosa e trovare che la proprietà universale dei derivati sinistri altro non è che

$$\mathfrak{L}\mathcal{F} \cong \text{Ran}_{\mathcal{Q}}\mathcal{F}. \tag{A.23}$$

Definizione A.8 : Un funtore derivato *assoluto* di \mathcal{F} come una coppia $(\mathfrak{R}\mathcal{F}, \underline{\alpha})$ tale che per ogni $\mathcal{H}: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{D}$ la coppia $(\mathcal{H} \circ \mathfrak{R}\mathcal{F}, \mathcal{H} * \underline{\alpha})$ sia un funtore derivato per $\mathcal{H} \circ \mathcal{F}$.

Ovviamente un funtore derivato assoluto di \mathcal{F} è un funtore derivato di \mathcal{F} ; altrettanto ovviamente, se \mathcal{F} ammette un funtore derivato (eventualmente assoluto) esso è unico, essendo definito tramite una proprietà universale.

Definizione A.9: Siano \mathbf{C}, \mathbf{C}' due categorie, e \mathbf{W}, \mathbf{W}' due sottocategorie. Chiamiamo $\mathcal{Q}: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}[\mathbf{W}^{-1}]$, $\mathcal{Q}': \mathbf{C}' \rightarrow \mathbf{C}'[\mathbf{W}'^{-1}]$ i funtori canonici. Un funtore derivato destro *totale* di $\mathcal{F}: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}'$ è una coppia $(\mathfrak{R}\mathcal{F}, \underline{\alpha})$, in cui $\mathfrak{R}\mathcal{F}: \mathbf{C}[\mathbf{W}^{-1}] \rightarrow \mathbf{C}'[\mathbf{W}'^{-1}]$ e $\underline{\alpha}: \mathcal{Q}' \circ \mathcal{F} \rightarrow \mathfrak{R}\mathcal{F} \circ \mathcal{Q}$, che è il funtore derivato destro di $\mathcal{Q}' \circ \mathcal{F}$. La situazione è esemplificata (e semplificata) dal disegnare il diagramma

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{C} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathbf{C} \\
 \mathcal{Q} \downarrow & \searrow \underline{\alpha} & \downarrow \mathcal{Q}' \\
 \mathbf{C}[\mathbf{W}^{-1}] & \xrightarrow{\mathfrak{R}\mathcal{F}} & \mathbf{C}'[\mathbf{W}'^{-1}]
 \end{array} \quad (\text{A.24})$$

Analogamente si danno le definizioni di derivato sinistro totale, derivato assoluto totale destro e sinistro.

Teorema A.2: Siano \mathbf{C}, \mathbf{C}' due categorie, \mathbf{W}, \mathbf{W}' sottocategorie rispettivamente dell'una e dell'altra, $\mathcal{Q}: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}[\mathbf{W}^{-1}]$, $\mathcal{Q}': \mathbf{C}' \rightarrow \mathbf{C}'[\mathbf{W}'^{-1}]$ i funtori canonici di localizzazione, $\mathcal{F}: \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{C}': \mathcal{G}$ una coppia di funtori aggiunti di unità $\underline{\eta}$ e counità $\underline{\epsilon}$. Se \mathcal{F} ha un derivato sinistro assoluto totale, e \mathcal{G} un derivato destro assoluto totale, allora i funtori

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{L}\mathcal{F}: \mathbf{C}[\mathbf{W}^{-1}] &\rightarrow \mathbf{C}'[\mathbf{W}'^{-1}] \\
 \mathfrak{R}\mathcal{G}: \mathbf{C}'[\mathbf{W}'^{-1}] &\rightarrow \mathbf{C}[\mathbf{W}^{-1}]
 \end{aligned}$$

è una coppia di funtori aggiunti, e unità $\tilde{\eta}$ e counità $\tilde{\epsilon}$ possono essere scelte in modo tale che

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{L}\mathcal{F} \circ \mathcal{Q} \circ \mathcal{G} & \xrightarrow{\mathfrak{L}\mathcal{F} \circ \underline{\beta}} & \mathfrak{L}\mathcal{F} \circ \mathfrak{R}\mathcal{G} \circ \mathcal{Q}' \\
 \underline{\alpha} * \mathcal{G} \downarrow & & \downarrow \tilde{\epsilon} * \mathcal{Q}' \\
 \mathcal{Q}' \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{G} & \xrightarrow{\mathcal{Q}' * \underline{\epsilon}} & \mathcal{Q}' \\
 & & \mathfrak{R}\mathcal{G} \circ \mathcal{Q}' \circ \mathcal{F} \xleftarrow{\mathfrak{R}\mathcal{G} * \underline{\alpha}} \mathfrak{R}\mathcal{G} \circ \mathfrak{L}\mathcal{F} \circ \mathcal{Q} \\
 & & \uparrow \underline{\beta} * \mathcal{F} \quad \quad \quad \uparrow \tilde{\eta} * \mathcal{Q} \\
 & & \mathcal{Q} \circ \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \xleftarrow{\mathcal{Q} * \underline{\eta}} \mathcal{Q}
 \end{array} \quad (\text{A.25})$$

siano diagrammi commutativi di trasformazioni naturali.

Appendice B

SUCCESSIONI SPETTRALI

I apologize to those who find this etymology excessive.
At least we are not debating the existence of God.

Topos Theory newsgroup

B.1 Generalità.

LA NOZIONE di successione spettrale nasce in teoria dell'omotopia e dell'omologia, come metodo per calcolare l'omologia di bicompleksi (essenzialmente un complesso "bidimensionale" in cui vi sono due differenziali, uno orizzontale e uno verticale, che anticommutano): considerare l'omologia delle righe e poi delle colonne conduce a certi oggetti di omologia, e considerare prima l'omologia delle colonne e poi delle righe conduce a oggetti di omologia che, a parte casi banali, possono essere molto diversi dai precedenti. Una prima giustificazione ingenua per l'uso delle successioni spettrali potrebbe quindi essere questa. D'altra parte è vero che esistono ragioni ben più profonde per adottare questa tecnica di calcolo così raffinata (ma a tratti così ostile): fu Leray uno dei primi a considerare oggetti di questo tipo, coinvolgendoli nel calcolo dei gruppi di coomologia di certi fasci: nelle notazioni che saranno sviluppate lungo la presente appendice, Leray costruì una successione spettrale

$$H^p(X, \mathfrak{N}^q f_* F) \tag{B.1}$$

che deve visibilmente servire ad "approssimare" con sempre meno scarto la coomologia del fascio originario. In effetti, in una impostazione moderna è facile accorgersi che la successione spettrale di Leray è un caso particolare della successione spettrale di Grothendieck, che qui appare nel Teorema **B.2** (si ricordi infatti che $H^p(X, \mathcal{G}) = \mathfrak{N}^p \Gamma(X, \mathcal{G})$ per ogni fascio \mathcal{G}).

B.1. GENERALITÀ.

Supponiamo fissata una categoria abeliana \mathbf{A} . Sia (C, δ) un complesso di cocatene in \mathbf{A} , riguardato come oggetto graduato $\{C^n\}$ con un differenziale, ovvero una mappa graduata di grado $+1$.

Definizione B.1 [COMPLESSO FILTRATO]: Una *filtrazione* (decescente) di C consiste di una decomposizione di $C = \{C^n\}$ in una famiglia di sottoggetti $\{F_p C^n\}_p$ che soddisfi alle seguenti tre condizioni

- *monotonia*: $F_{p-1}C^n \supset F_p C^n$ per ogni $p \in \mathbb{Z}$;
- la filtrazione *ricopre* il complesso: $C^n = \bigcup_p F_p C^n$;
- filtrazione e differenziale sono *compatibili*: $\delta(F_p C^n) \subseteq F_p C^{n+1}$.

Spesso si assume anche che la filtrazione sia *separata* (o *Hausdorff*), nel senso che $\bigcap_p F_p C^n = (0)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

Una filtrazione di C si dice *regolare* se $F_p C^n = 0$ definitivamente in p , ovvero per tutti i $p > N(n)$.

Definizione B.2: Il *modulo graduato associato* ad una filtrazione $\{F_p C\}$ è definito come l'oggetto graduato $\{G_p C\}$ dove

$$G_p C^n = \frac{F_p C^n}{F_{p+1} C^n} \quad (\text{B.2})$$

Definiamo i moduli graduati

$$Z_r^p := \{c \in F_p C \mid \delta c \in F_{p+r} C\} \quad (\text{B.3})$$

$$B_r^p := \delta(Z_{r-1}^{p-r+1}) + Z_{r-1}^{p+1} \quad (\text{B.4})$$

$$E_r^p := Z_r^p / B_r^p \quad (\text{B.5})$$

Definiamo poi

$$Z_r^{p,q} := Z_r^p \cap F_p C^{p+q} \quad (\text{B.6})$$

$$B_r^{p,q} := \delta(Z_{r-1}^{p-r+1, q+r-2}) + Z_{r-1}^{p+1, q-1} \quad (\text{B.7})$$

$$E_r^{p,q} := Z_r^{p,q} / B_r^{p,q} \quad (\text{B.8})$$

Si tratta dei sommandi diretti di Z_r^p, B_r^p, E_r^p di grado totale (indotto dal grado di C) uguale a $p + q$. L'indice p è detto *grado della filtrazione*, l'indice q il suo *complementare*. Questo nome è dovuto al fatto che per brevità si indica spesso con una n ogni occorrenza di $p + q$, di modo che $q = n - p$.

Osservazione B.1 : Il differenziale $\delta: C \rightarrow C$ ne induce uno sul complesso \mathcal{E}_r (chiamato δ_r), per ogni $r \geq 1$, che aumenta di r il grado della filtrazione (come si può vedere da **B.3**), e di conseguenza diminuisce di $r - 1$ il grado complementare, dato che il grado totale di δ deve essere $+1$. Si ottiene cioè un complesso di cocatene

$$\delta_r: E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r,q+1-r} \quad (\text{B.9})$$

per ogni $r \geq 1$.

Ora, a partire da questa osservazione è facile notare che il complesso di omologia di \mathcal{E}_r rispetto al differenziale δ_r è isomorfo a \mathcal{E}_{r+1} , e si può verificare che

$$E_1^{p,q} \cong H^{p+q}(G_p C) \quad (\text{B.10})$$

dove δ_1 è l'omomorfismo di connessione associato alla successione esatta corta $0 \rightarrow \frac{F_{p+1}C}{F_{p+2}C} \rightarrow \frac{F_p C}{F_{p+2}C} \rightarrow \frac{F_p C}{F_{p+1}C} \rightarrow 0$.

Definizione B.3 [SUCCESIONE SPETTRALE]: La collezione di moduli differenziali bigraduati $\{(E_r^{p,q}, \delta_r)\}$ per $r \geq 1$, dove i δ_r sono definiti come in **B.9** e vale la proprietà **B.10** prende il nome di *successione spettrale*.

Si noti che vale la catena di inclusioni

$$Z_1^{p,q} \supset Z_2^{p,q} \supset \dots \supset B_2^{p,q} \supset B_1^{p,q} \quad (\text{B.11})$$

Dimostrazione. Dalla proprietà per cui \mathcal{E}_{r+1} è l'omologia $H(\mathcal{E}_r) = \frac{\ker d_r^{p,q}}{\text{im } d_r^{p,q+1-r}}$ discende che $\text{im } d_r^{p,q+1-r} \leq \ker d_r^{p,q} \leq E_{r+1}^{p,q}$.

Ragioniamo induttivamente partendo da $B_2 \subset Z_2 \subset E_1$. Il quarto teorema di isomorfismo, o teorema di corrispondenza, dice che ogni sottoggetto di E_2 è della forma H/B_2 ; in particolare così è per $Z_3 \text{ mod } B_2$ e $B_3 \text{ mod } B_2$ (chiamo così i 3-cicli e i 3-bordi relativi ai 2-bordi): allora

$$B_2 \subset B_3 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset E_1 \quad (\text{B.12})$$

Ora ripetendo lo stesso ragionamento per i 4-cicli e 4-bordi relativi, fino agli r -cicli ed r -bordi relativi si ha la filtrazione desiderata:

$$0 \subset B_2 \subset \dots \subset B_r \subset Z_r \subset Z_{r-1} \subset \dots \subset Z_2 \subset E_1 \quad (\text{B.13})$$

La definizione data di $\{E, Z, B\}_\infty$ allora ha senso per costruzione. \square

Se definiamo $Z_\infty^{p,q} = \bigcap_{r=0}^\infty Z_r^{p,q}$ e $B_\infty^{p,q} = \bigcup_{r=0}^\infty B_r^{p,q}$, è plausibile che queste posizioni estendano in modo coerente al caso $r = \infty$ dando $E_\infty^{p,q} = Z_\infty^{p,q}/B_\infty^{p,q}$. Per apprezzare la sottigliezza di questo ragionamento è necessario introdurre la nozione di *convergenza* di una successione spettrale.

B.1. GENERALITÀ.

Se la filtrazione $\{F_p C^n\}_p$ è regolare, allora esiste un indice $r = r(p, q)$ tale che $Z_r^{p,q} \cong Z_\infty^{p,q}$, o equivalentemente, δ_s è la freccia zero, per ogni $s \geq r(p, q)$. Dunque ci sono degli epimorfismi naturali, per $s \geq r(p, q)$

$$E_r^{p,q} \twoheadrightarrow E_{r+1}^{p,q} \twoheadrightarrow \dots \twoheadrightarrow E_\infty^{p,q} \quad (\text{B.14})$$

coi quali si può verificare che $E_\infty^{p,q} \cong \varinjlim_r E_r^{p,q}$ ogni volta che la filtrazione che definisce $\{\mathcal{E}_r\}$ sia regolare. In queste circostanze diciamo che \mathcal{E}_r converge a \mathcal{E}_∞ , scrivendo $\mathcal{E}_r \twoheadrightarrow_p \mathcal{E}_\infty$, o $E_r^{p,q} \twoheadrightarrow_p E_\infty^{p,q}$. Nella pratica è comune che la successione spettrale $\{\mathcal{E}_r\}$ sia *stazionaria* al grado $s \geq 2$, ovvero che $E_s^{p,q} = E_{s+1}^{p,q} = E_{s+2}^{p,q} = \dots$. In questo caso ovviamente $E_s^{p,q} \cong E_\infty^{p,q}$. Se una successione spettrale è limitata (ossia se per ogni n fissato esiste solo un numero finito di indici p, q tali che $p + q = n$ ed $E_r^{p,q} \neq 0$), allora è stazionaria per qualche $r = r_{p,q}$, che però si può sempre scegliere uniformemente rispetto alla condizione $p + q = n$.

Se disponiamo della filtrazione di un complesso graduato $\{A_n\}$, e la successione spettrale associata a questa filtrazione ha la proprietà per cui $E_\infty^{p,q} \cong G_p A^{p+q}$, scriviamo per brevità

$$E_2^{p,q} \twoheadrightarrow_p A^{p+q}. \quad (\text{B.15})$$

L'esempio classico è quello di un complesso C filtrato da una filtrazione regolare: $E_2^{p,q} \twoheadrightarrow_p H^{p+q}(C)$. Più precisamente, qualsiasi filtrazione $F^p C$ di un complesso C induce naturalmente una filtrazione della sua (co)omologia, $\Phi^p H^n(C) = \text{im } \iota_p^*$, dove $\iota_p: F^p C \rightarrow C$ è l'inclusione canonica. Se la filtrazione era limitata, ovvero se per ogni $r \geq 1$ esistono degli indici $b(r), t(r)$ tali che $F^s C_n = 0$ per $s \leq b(n)$, $F^w C_n = C_n$ per $w \geq t(n)$, allora la successione spettrale indotta dalla filtrazione è convergente e tale che

$$E_\infty^{p,q} \cong \frac{\Phi^p H^{p+q}(C)}{\Phi^{p-1} H^{p+q}(C)} \quad (\text{B.16})$$

(è facile osservare che gli stessi bound della filtrazione passano alla filtrazione indotta in (co)omologia).

Un altro caso degno di nota e frequente da incontrare in pratica, in cui una successione spettrale converge rapidamente è quando questa *collassa* rispetto a un asse:

Definizione B.4 : Una successione spettrale (\mathcal{E}_r, d_r) *collassa* lungo l'asse p se $E_2^{p,q} = 0$ per ogni $q \neq 0$; collassa rispetto all'asse q se $E_2^{p,q} = 0$ per ogni $p \neq 0$.

Proposizione B.1 : Sia (\mathcal{E}_r, d_r) una successione spettrale concentrata nel primo quadrante, tale che $E_2^{p,q} \twoheadrightarrow_p H^n(C)$. Allora

- Se (\mathcal{E}_r, d_r) collassa rispetto a uno degli assi, $E_2^{p,q} \cong E_\infty^{p,q}$, per ogni p, q .
- Se (\mathcal{E}_r, d_r) collassa rispetto all'asse p , allora $H^n(C) \cong E_2^{n,0}$;
- Se (\mathcal{E}_r, d_r) collassa rispetto all'asse q , allora $H^n(C) \cong E_2^{0,n}$.

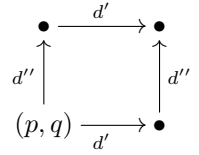
B.2 Complessi doppi.

Le successioni spettrali sono nate come metodo per calcolare la (co)omologia del *complesso totale* associato ad un complesso di (co)catene.

Definizione B.5 [BICOMPLESSO]: Un *bicomplesso*, o *complesso doppio* consiste di un oggetto bigraduato $\mathcal{M} = \{M_{p,q}\}$ con due differenziali $d', d'': \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, rispettivamente di grado $(1, 0)$ e $(0, 1)$, tali che

$$d'_{p,q+1} \circ d''_{p,q} + d''_{p+1,q} \circ d'_{p,q} = 0 \quad (\text{B.17})$$

Quest'ultima condizione si traduce nell'anticommutatività del diagramma a fianco.



Definizione B.6 [COMPLESSO TOTALE]: Se \mathcal{M} è un bicomplesso, il complesso totale associato ad \mathcal{M} è il complesso $\text{Tot}(\mathcal{M})$ dato da

$$\text{Tot}(\mathcal{M})_n = \bigoplus_{p+q=n} M_{pq} \quad (\text{B.18})$$

con differenziali $D_n = \sum_{p+q=n} d'_{pq} + d''_{pq}$.

Osservazione B.2: Se \mathcal{M} è un bicomplesso, allora $(\text{Tot}(\mathcal{M}), D)$ è un complesso: questo segue direttamente dall'anticommutatività in **B.17**.

Il differenziale D è definito come una mappa $\text{Tot}(\mathcal{M})_n \rightarrow \text{Tot}(\mathcal{M})_{n+1}$; si noti che per definizione $\text{im } d'_{pq} \subseteq M_{p+1,q}$ e $\text{im } d''_{pq} \subseteq M_{p,q+1}$. Da questo si deduce che $\text{im } D \subseteq \text{Tot}(\mathcal{M})_{n+1}$ e la composizione

$$D \circ D = \sum_{p,q} (d' + d'')(d' + d'') \quad (\text{B.19})$$

$$= \sum d' d' + \sum (d' d'' + d'' d') + \sum d'' d'' \quad (\text{B.20})$$

$$= 0 + 0 + 0. \quad (\text{B.21})$$

Abbiamo visto che da una filtrazione di un oggetto graduato origina in modo naturale una successione spettrale $\{\mathcal{E}_r, \delta_r\}$. Al complesso totale di un bicomplesso si possono associare naturalmente *due* filtrazioni che originano *due* successioni spettrali distinte, le quali convergono entrambe alla sua (co)omologia.

Definizione B.7 [PRIMA FILTRAZIONE]: Sia (\mathcal{M}, d', d'') un bicomplesso. Definiamo

$$\left({}^1F_p \text{Tot}(\mathcal{M})\right)_n := \bigoplus_{i \geq p} M_{i,n-i} \quad (\text{B.22})$$

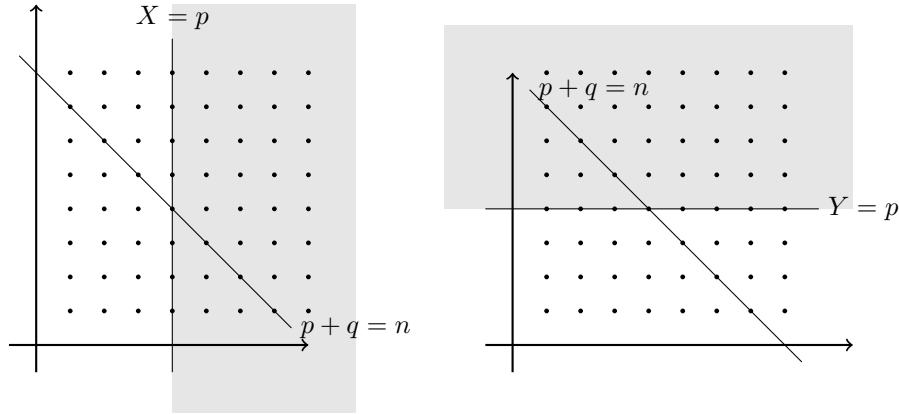
ossia, $\left({}^1F_p \text{Tot}(\mathcal{M})\right)_n$ è la somma diretta di tutti gli elementi del bicomplesso che giacciono a destra della retta verticale $X = p$.

Dualmente, si può dare la definizione di

Definizione B.8 [SECONDA FILTRAZIONE]: Sia (\mathcal{M}, d', d'') un bicomplesso. Definiamo

$$\left({}^{\text{II}}F_p \text{Tot}(\mathcal{M}) \right)_n := \bigoplus_{j \geq p} M_{n-j, j} \quad (\text{B.23})$$

ossia, $\left({}^{\text{II}}F_p \text{Tot}(\mathcal{M}) \right)_n$ è la somma diretta di tutti gli elementi del bicomplesso che giacciono sopra alla retta orizzontale $Y = p$.



Osservazione B.3: Se definiamo (nel modo ovvio) $\mathcal{M}^t = \{M_{q,p}\}$ come il complesso trasposto di $\mathcal{M} = \{M_{p,q}\}$, è facile notare che ${}^{\text{II}}F_p \text{Tot}(\mathcal{M}) = {}^{\text{I}}F_p \text{Tot}(\mathcal{M}^t)$: infatti $\bigoplus_{j \geq p} M_{n-j, j} = \bigoplus_{j \geq p} M_{j, n-j}^t$.

Teorema B.1: Sia \mathcal{M} un complesso concentrato nel primo quadrante, e siano ${}^{\text{I}}\mathcal{E}_r, {}^{\text{II}}\mathcal{E}_r$ le successioni spettrali determinate dalle due filtrazioni di $\text{Tot}(\mathcal{M})$. Allora

- Entrambe le filtrazioni sono limitate;
- Per ogni p, q esistono degli indici r_1, r_2 (dipendenti da p, q) tali che ${}^{\text{I}}E_{r_1}^{p,q} \cong {}^{\text{I}}E_{\infty}^{p,q}, {}^{\text{II}}E_{r_2}^{p,q} \cong {}^{\text{II}}E_{\infty}^{p,q}$.
- ${}^{\text{I}}E_2^{p,q} \implies_p H^{p+q}(\text{Tot}(\mathcal{M}))$ e ${}^{\text{II}}E_2^{p,q} \implies_p H^{p+q}(\text{Tot}(\mathcal{M}))$.

In effetti il terzo punto si può enunciare e dimostrare in modo più esplicito:

Proposizione B.2: Se \mathcal{M} è un bicomplesso concentrato nel primo quadrante, allora

$${}^{\text{I}}E_1^{p,q} = H^q(\mathcal{M}_{p, \bullet}) \quad {}^{\text{I}}E_2^{p,q} = H^{p'} H^{q''}(\mathcal{M}) \implies_p H^n(\text{Tot}(\mathcal{M})) \quad (\text{B.24})$$

$${}^{\text{II}}E_1^{p,q} = H^q(\mathcal{M}_{\bullet, p}) \quad {}^{\text{II}}E_2^{p,q} = H^{p'} H^{q''}(\mathcal{M}) \implies_p H^n(\text{Tot}(\mathcal{M})). \quad (\text{B.25})$$

C'è una successione spettrale che lega il derivato della composizione di due funtori alla composizione dei funtori derivati, inizialmente studiata da Cartan e Eilenberg e portata alla forma in cui la conosciamo da Grothendieck. Ricordiamo che un oggetto A in una categoria abeliana si dice \mathcal{F} -aciclico (a destra, o a sinistra) per un funtore additivo $\mathcal{F}: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$ se $\mathfrak{N}^i \mathcal{F}(B) = 0$ (o $\mathfrak{L}^i \mathcal{F}(B) = 0$) per ogni $i \geq 1$.

Teorema B.2 : Siano $\mathbf{A} \xrightarrow{\mathcal{G}} \mathbf{B} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathbf{C}$ funtori additivi tra categorie abeliane con abbastanza iniettivi. Se \mathcal{F} è esatto a sinistra e $\mathcal{G}(X)$ è \mathcal{F} -aciclico a destra per ogni $X \in \text{Inj}(\mathbf{A})$, allora per ogni $A \in \mathbf{A}$ esiste una successione spettrale concentrata nel terzo quadrante tale che

$$E_2^{p,q} = \mathfrak{N}^p \mathcal{F} \circ \mathfrak{N}^q \mathcal{G}(A) \implies_p \mathfrak{N}^{p+q}(\mathcal{G}\mathcal{F})(A). \quad (\text{B.26})$$

Un'altra successione spettrale molto usata (su cui si basano parecchi punti della dimostrazione del Teorema di ricostruzione) è la *successione spettrale di Künneth*: essa serve, essenzialmente, a calcolare l'omologia del prodotto tensore di complessi (che è in modo naturale un bicomplesso nel senso della Definizione B.5). Ad ipotesi piuttosto forti (esattamente quelle che fanno collassare la successione), si può enunciare un risultato analogo senza far ricorso al macchinario qui presentato: lo riportiamo con un cenno di dimostrazione per completezza.

Teorema B.3 : Siano C, \mathcal{D} due complessi di moduli su un PID R ; se almeno uno tra C, \mathcal{D} è piatto, allora esiste una sequenza esatta corta

$$\bigoplus_{p+q=n} (H_p(C) \otimes H_q(\mathcal{D})) \xrightarrow{\zeta} H_n(C \otimes \mathcal{D}) \twoheadrightarrow \bigoplus_{p+q=n} \text{Tor}_1^R(H_p(C), H_q(\mathcal{D})) \quad (\text{B.27})$$

dove ζ è indotta dalla mappa $Z_p(C) \otimes Z_q(\mathcal{D}) \rightarrow Z_{p+q}(C \otimes \mathcal{D})$.

Dimostrazione (sketch). Anzitutto, senza perdita di generalità, si può supporre che sia C ad essere piatto (perché $C \otimes \mathcal{D}$ e $\mathcal{D} \otimes C$ sono isomorfi mediante $c \otimes d \mapsto (-1)^{\deg c \deg d} d \otimes c$).

Ora, chiamiamo $Z = (Z_p), \mathcal{B} = (B_p)$ cicli e bordi di C e $\mathcal{B}' = (B'_p) = (B_{p-1})$: dall'esattezza della sequenza $0 \rightarrow Z \rightarrow C \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow 0$ e dalla piatezza di C segue che anche Z, \mathcal{B}' sono piatti; consideriamo la sequenza lunga in omologia:

$$\begin{array}{ccc} H(Z \otimes \mathbf{D}) & \xrightarrow{(i \otimes \mathcal{D})_*} & H(C \otimes \mathcal{D}) \\ & \swarrow \omega \quad \searrow (\partial \otimes \mathcal{D})_* & \\ & H(\mathcal{B}' \otimes \mathcal{D}) & \end{array} \quad (\text{B.28})$$

$H_n(\mathcal{B}' \otimes \mathcal{D}) \cong (\mathcal{B} \otimes H(\mathcal{D}))_{n-1}$ perché $\mathcal{B} \otimes -$ è un funtore esatto, essendo \mathcal{B} piatto. Allo stesso modo $H_n(Z \otimes \mathcal{D}) \cong (Z \otimes H(\mathcal{D}))_n$. Allora la sequenza lunga in

omologia diventa

$$\begin{array}{ccc}
 Z \otimes H(\mathcal{D}) & \xrightarrow{(i \otimes \mathcal{D})_*} & H(C \otimes \mathcal{D}) \\
 & \swarrow \omega & \nwarrow (\partial \otimes \mathcal{D})_* \\
 & \mathcal{B} \otimes H(\mathcal{D}) &
 \end{array} \quad (\text{B.29})$$

È poi evidente che $(i \otimes \mathcal{D})_*$ induce la ζ dell'enunciato. Altrettanto facile osservare che ω è la mappa indotta dall'inclusione $\mathcal{B} \subset Z$: $\omega: H(\mathcal{B} \otimes \mathcal{D}) = \mathcal{B} \otimes H(\mathcal{D}) \ni \partial c \otimes z \mapsto \partial c \otimes z \in H(Z \otimes \mathcal{D}) = Z \otimes H(\mathcal{D})$. Essendo Z piatto, c'è la sequenza esatta

$$0 \rightarrow \text{Tor}(H(C), H(\mathcal{D})) \rightarrow \mathcal{B} \otimes H(\mathcal{D}) \xrightarrow{\omega} Z \otimes H(\mathcal{D}) \rightarrow H(C) \otimes H(\mathcal{D}) \rightarrow 0 \quad (\text{B.30})$$

che è esattamente quella voluta. La dimostrazione è conclusa dimostrando che questa sequenza spezza. \square

Quanto appena provato va sotto il nome di *formula di Künneth* per l'omologia: la sua importanza è centrale in topologia algebrica, laddove l'omologia (per esempio, singolare) del prodotto di due spazi topologici si ottiene dal complesso totale delle omologie dei fattori, a cui si aggiunge un "termine correttivo" misurato dalla *torsione* tra $H_p(X)$, $H_q(Y)$:

$$H_n(X \times Y) \cong \bigoplus_{p+q=n} H_p(X) \otimes_{\mathbb{Z}} H_q(Y) \oplus \bigoplus_{p+q=n-1} \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_p(X), H_q(Y)) \quad (\text{B.31})$$

È evidente che in ipotesi di piatezza si ha $\bigoplus_{p+q=n} H_p(C) \otimes H_q(\mathcal{D}) \cong H_n(C \otimes \mathcal{D})$. È poi chiaramente possibile enunciare e dimostrare una formula di Künneth per la coomologia, avendo cura di sostituire ogni occorrenza di Tor con Ext : tralasciamo questo facile compito di dualizzazione.

Proposizione B.3 [SUCCESIONE SPETTRALE DI KÜNNETH]: Sia R un anello (commutativo e unitario), C un complesso positivo di R -moduli piatti e \mathcal{D} un complesso positivo di R -moduli. Allora esiste una successione spettrale, concentrata nel primo quadrante,

$$E_{p,q}^2 = \bigoplus_{s+t=q} \text{Tor}_p^R(H_s(C), H_t(\mathcal{D})) \implies_p H_n(C \otimes_R \mathcal{D}). \quad (\text{B.32})$$

Bibliografia

- [Bar] C. Bartocci, U. Bruzzo and D. Hernández Ruipérez, *Fourier-Mukai and Nahm transforms in geometry and mathematical physics*, Progress in Mathematics, vol. 276, Birkhäuser, 2009
- [Bei] A. Beilinson, *Coherent sheaves on \mathbb{P}^n and problems in linear algebra*, Functional Analysis and Application 12, 1978, pp. 68-69.
- [BoK] A. I. Bondal, M. M. Kapranov, *Representable functors, Serre functors, and mutations*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 53, 1989, pp. 1183-1205.
- [BoO] A. I. Bondal, D. Orlov, *Semiorthogonal decomposition for algebraic varieties*, <http://arxiv.org/abs/alg-geom/9506012>
- [Bor1] F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra*, volume I, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 50, Cambridge University Press, 1994.
- [Cal] Andrei Căldăraru, *Derived categories of sheaves: a skimming*, <http://www.math.wisc.edu/~andreic/publications/lnPoland.pdf>
- [FLa] W. Fulton, S. Lang, *Riemann-Roch Algebra*, Graduate Texts in Mathematics 277, Springer-Verlag 1985.
- [Gel] S. I. Gel'fand, Yu. I. Manin, *Methods of Homological Algebra*, Springer-Verlag 2003.
- [God] Roger Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Ed. Hermann, 1973.
- [GrS4] A. Grothendieck, et al., *Séminaire de Géométrie Algébrique 4 (Théorie des topos et cohomologie étale des schémas)*, tomo I, Lecture Notes in Mathematics 269, Springer-Verlag 1972.
- [Har] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics 52, Springer-Verlag 1977.
- [HiS] Peter John Hilton and Urs Stammbach, *A course in homological algebra*, Graduate Texts in Mathematics 4, Springer-Verlag 1971.
- [Hol] Thorsten Holm e Peter Jørgensen, *Triangulated categories: Definitions, properties and examples*, pp. 1-51 in "Triangulated categories", LMS Lecture Note Series, vol. 375, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [Ill] L. Illusie, *Existence de résolutions globales*, in "SGA6 - Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch" (Lecture notes in mathematics 225).

- [Kra] Henning Krause, *Localization theory for triangulated categories*, pp. 161-235 in “Triangulated categories”, LMS Lecture Note Series, vol. 375, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [Mal] Georges Maltsiniotis, *Quillen’s adjunction theorem for derived functors, revisited*. <http://arxiv.org/abs/math/0611952>
- [McL] S. MacLane, *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Mathematics 5, Springer—Verlag 1971.
- [Nee] Amnon Neeman, *Triangulated categories*, Annals of Mathematics Studies 148, Princeton University Press.
- [Oko] C. Okonek et al., *Vector bundles on complex projective spaces*, Birkhäuser, 1980.
- [Orl] A. I. Bondal, D. Orlov, *Reconstruction of a Variety from the Derived Category and Groups of Autoequivalences*, Compositio Mathematica 125 2001, pp 327-344.
- [Ros] A. Rosenberg, *The spectrum of abelian categories and reconstructions of schemes*, in Rings, Hopf Algebras, and Brauer groups, Lectures Notes in Pure and Appl. Math. 197, Marcel Dekker, New York, 257–274, 1998.
- [Rot] J. J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Universitext, Berlin, New York: Springer-Verlag.
- [Sch1] P. Schapira & M. Kashiwara, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Berlin, New York: Springer-Verlag.
- [Tod] Yukinobu Toda, *Derived categories of coherent sheaves on algebraic varieties*, pp. 408-451 in “Triangulated categories”, LMS Lecture Note Series, vol. 375, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [Toe] B. Toën, *Lectures on DG-categories*, <http://www.math.univ-toulouse.fr/~toen/swisk.pdf>
- [Uen] K. Ueno, *Algebraic Geometry I: From Algebraic Varieties to Schemes*, Translations of Mathematical Monographs, vol.185.
- [Ver] J.-L. Verdier, *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*, Astérisque no. 239 (1996).
- [Vic] James Vick, *Homology theory: an introduction to Algebraic Topology*, New York, Academic Press (1973), Pure and applied mathematics series.
- [Wei] C. A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge University Press 1994.
- [Zis] P. Gabriel, M. Zisman, *Calculus of fractions and homotopy theory*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag New York 1967.